

Okruhy polynómov

28. apríla 2022

Definícia polynómu

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

- ▶ $a_i \in R$, R je komutatívny okruh s jednotkou
- ▶ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in R =$ koeficienty polynómu p
- ▶ n je stupeň polynómu (ak $a_n \neq 0$)
- ▶ a_n je vedúci koeficient (ak $a_n \neq 0$)
- ▶ Polynómy sa rovnajú, ak majú rovnaké koeficienty.

Operácie

Súčet polynómov p a q je

$$p + q = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i.$$

Súčin polynómov p a q je polynóm $r = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$, kde

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

$(R[x], +, \cdot)$ je komutatívny okruh s jednotkou.

Násobenie a stupeň

Tvrdenie

Ak R je obor integrity, tak pre ľubovoľné nenulové polynómy $f, g \in R[x]$ platí

$$\text{st}(fg) = \text{st}(f) + \text{st}(g)$$

a okruh $R[x]$ polynómov nad okruhom R je obor integrity.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \\ c_{n+m} &= a_n b_m \end{aligned}$$

Veta o delení so zvyškom

Veta (Veta o delení so zvyškom)

Nech F je pole, $f(x), g(x) \in F[x]$ a $g(x) \neq 0$. Potom existujú $q(x), r(x) \in F[x]$ také, že

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

a $\text{st } r(x) < \text{st } g(x)$.

Navyše, $q(x)$ a $r(x)$ sú týmito podmienkami jednoznačne určené.

$q(x)$ = podiel

$r(x)$ = zvyšok po delení

Veta o delení so zvyškom

Veta

Nech a , b sú celé čísla, $b > 0$. Potom existujú celé čísla q a r také, že

$$a = q \cdot b + r \quad a \quad 0 \leq r < b.$$

Navyše, q a r sú týmito podmienkami jednoznačne určené.

Dosadzovací homomorfizmus

Definícia

Nech R je komutatívny okruh s jednotkou. *Polynomickou funkciou* nad R budeme rozumieť ľubovoľnú funkciu $f: R \rightarrow R$ určenú predpisom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ a $a_1 \dots a_n \in R$.

Okruh polynomických funkcií: $(F\langle x \rangle, +, \cdot)$

polynóm: $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

funkcia: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$$\varphi: F[x] \rightarrow F\langle x \rangle$$

Dosadzovací homomorfizmus

Ak $b \in R$, dá sa b dosadiť do polynómu
 $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in R[x]$.

$$f_b: R[x] \rightarrow R$$

$$f_b: f \mapsto a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0$$

Polynomické funkcie

Tvrdenie

Ak F je nekonečné pole tak polynomická funkcia $f: F \rightarrow F$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

sa rovná nulovej funkcii práve vtedy, keď $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$,
t.j. vtedy, keď sú všetky koeficienty nulové.

Polynomické funkcie

polynomické funkcie \neq polynómy

Príklad

- ▶ $F = \mathbb{Z}_2$
- ▶ ako polynómy: $x^2 + x \neq 0$
- ▶ ako funkcie: $x^2 + x = 0$