Deliteľnosť, euklidovské okruhy

28. apríla 2022

Deliteľnosť

Lema

Nech R je obor integrity, $a, b \in R$. Ak platí $ab = a$ pre $a \neq 0$, tak $b = 1$.

Deliteľnosť

Definícia

Nech R je obor integrity. Hovoríme, že a *delí* b, označujeme $a \mid b$, ak existuje $c \in R$ také, že $b = ca$.

- $3 \mid 9$, $3 \nmid 7$ v $\mathbb{Z}$
- $3 \mid \pm 9$ v $\mathbb{Z}$
- $x - 1 \mid x^2 - 1$ v $\mathbb{R}[x]$

Deliteľnosť

Lema

Nech R je obor integrity. Potom pre ľubovoľné $a, b, c, d \in R$, $a_i, r_i \in R$ platí

(i) $a \mid a$

(ii) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

(iii) $a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

(iv) $a \mid 0,\ 1 \mid a$

(v) $0 \mid a \Leftrightarrow a = 0$

(vi) $ac \mid bc \wedge c \neq 0 \Rightarrow a \mid b$

(vii) $a \mid a_i$ *pre* $i = 1, \dots n \Rightarrow a \mid a_1 r_1 + \cdots + a_n r_n$

Asociovanosť

Definícia

Ak $a, b \in R$, kde R je obor integrity, hovoríme, že prvky a a b sú *asociované*, označujeme $a \sim b$, ak $a \mid b$ a súčasne $b \mid a$

$$a \mid b \ \wedge \ b \mid a \Leftrightarrow a \sim b$$

Lema

Nech R je obor integrity. Pre ľubovoľné $a, b, c, d \in R$ platí

(i) $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

(ii) $a \sim a$

(iii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(iv) $a \sim b \wedge c \sim d \Rightarrow ac \sim bd$

Delitele jednotky

Definícia

Ak okruh R má jednotku a $ab = 1$, hovoríme, že a je *deliteľ jednotky*. Množinu všetkých deliteľov jednotky budeme označovať $U(R)$.

- ± 1 v $\mathbb{Z}$
- nenulové konštantné polynómy v $F[x]$

Asociovanosť a delitele jednotky

Tvrdenie

Nech R je obor integrity. Potom

(i) *Delitele jednotky s operáciou násobenia tvoria grupu, t.j. $(U(R), \cdot)$ je grupa.*

(ii) *$a \sim b$ práve vtedy, keď existuje deliteľ jednotky u taký, že $a = bu$.*

Euklidovské okruhy

Definícia

Obor integrity R sa nazýva *euklidovský okruh*, ak existuje funkcia $N\colon R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ taká, že pre ľubovoľné $a, b \in R$, $b \neq 0$ existujú $q, r \in R$ také, že $a = qb + r$ a buď $r = 0$ alebo $N(r) < N(b)$. Funkciu N budeme nazývať *norma*.

- V literatúre sa vyskytuje aj podmienka $N(a) \leq N(ab)$.
- $\mathbb{Z}$ a $F[x]$ sú euklidovské okruhy.

Lema

Ak R je euklidovský okruh, $u \neq 0$ a $N(u) = 0$, tak u je deliteľ jednotky.

Okruhy hlavných ideálov

Definícia

Ak R je obor integrity, hovoríme, že R je okruh hlavných ideálov, ak každý ideál v R je hlavný, t.j. ak je tvaru

$$I = (a) = \{ax; x \in R\}$$

pre nejaké $a \in R$.

Tvrdenie

Každý euklidovský okruh je okruh hlavných ideálov.

Okruhy hlavných ideálov

- $\mathbb{Z}$, $F[x]$ sú okruhy hlavných ideálov.
- $\mathbb{Z}[x]$ nie je okruh hlavných ideálov.

Tvrdenie

Ak $I = (m)$, $I \neq \{0\}$, je prvoideál v OHI R, tak I je maximálny.

Deliteľnosť v okruhoch hlavných ideálov

$$a \mid b \Leftrightarrow b \in (a) \Leftrightarrow (b) \subseteq (a)$$

$$a \sim b \Leftrightarrow (a) = (b)$$

Najväčší spoločný deliteľ

Definícia

Najväčší spoločný deliteľ prvkov $a, b \in R$ je taký prvok $c \in R$, že

(i) $c \mid a$, $c \mid b$,

(ii) pre ľubovoľný prvok $d \in R$ taký, že $d \mid a$ a $d \mid b$ platí aj $d \mid c$.

Označujeme ho $\gcd(a, b)$.

Najväčší spoločný deliteľ

Tvrdenie

[Bézoutova identita] Ak R je okruh hlavných ideálov, tak pre ľubovoľné $a, b \in R$ existuje v R najväčší spoločný deliteľ $c = \gcd(a, b)$.
Navyše, existujú také $x, y \in R$, že

$$c = xa + yb.$$

Dôsledok

Nech R je okruh hlavných ideálov, $a, b, c \in R$, $a, b \neq 0$. Ak $\gcd(a, b) = 1$ a $a \mid bc$, tak $a \mid c$.

$$\gcd(a, b) = 1 \quad \wedge \quad a \mid bc \qquad \Rightarrow \qquad a \mid c$$

Euklidov algoritmus

Lema

Ak R je obor integrity a $a, b \in R$, tak

$$\gcd(a, b) = \gcd(a + bx, b)$$

pre ľubovoľné $x \in R$.

Euklidov algoritmus

$$
\begin{array}{rll}
a = q_1 \cdot b + r_1 & N(r_1) < N(b) & r_1 = a - \\
b = q_2 \cdot r_1 + r_2 & N(r_2) < N(r_1) & r_2 = b - q_2.r_1 = (1 + q_1 q_2) b - \\
r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 & N(r_3) < N(r_2) & r_3 = r_2 - q_3.r_2 = \cdots = x_3 a - \\
\vdots & & \\
r_{l-2} = q_l \cdot r_{l-1} + r_l & N(r_l) < N(r_{l-1}) & r_l = r_{l-2} - q_l.r_{l-1} = \cdots = x_l a - \\
r_{l-1} = q_{l+1} \cdot r_l & \text{zvyšok } 0 &
\end{array}
$$

Euklidov algoritmus

$$\begin{aligned} 89 &= 5 \cdot 16 + 9 \\ 16 &= 1 \cdot 9 + 7 \\ 9 &= 1 \cdot 7 + 2 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 &= 89 - 5 \cdot 16 \\ 7 = 16 - 9 &= 6 \cdot 16 - 89 \\ 2 = 9 - 7 &= 2 \cdot 89 - 11 \cdot 16 \\ 1 = 7 - 3 \cdot 2 &= 39 \cdot 16 - 7 \cdot 89 \end{aligned}$$

$$\gcd(89, 16) = 1$$

Euklidov algoritmus

$$\gcd(89, 16) = 1$$

89	1	0	
16	0	1	
9	1	-5	1r-5*2r
7	-1	6	2r-3r
2	2	-11	3r-4r
1	-7	39	4r-3*5r

Euklidov algoritmus – inverzné prvky

$5^{-1} = ?$ v $\mathbb{Z}_{13}$
Euklidov algoritmus: $1 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5$

$$1 = -5 \odot 5 = 8 \odot 5$$

Euklidov algoritmus – polynómy

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$$
$$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$$

$f(x)$	1	0
$g(x)$	0	1
$h_1(x) = -3x^3 - 2x^2$	1	$-(x+3)$
$h_2(x) = 3x^2 - x - 2$	$x - 2$	$-(x^2 + x - 7)$
$h_3(x) = -3x - 2$	$x^2 - x - 1$	$-(x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$
$h_2(x) + (x-1)h_3(x) = 0$		

Okruhy s jednoznačným rozkladom

Definícia

Prvok $a \neq 0$ okruhu R sa nazýva *ireducibilný*, ak a je nenulový, nie je to deliteľ jednotky a ak z rovnosti $a = bc$ vyplýva, že niektorý z prvkov b, c je deliteľ jednotky v R.

- prvočísla v $\mathbb{Z}$
- ireducibilné polynómy v $F[x]$

Okruhy s jednoznačným rozkladom

Definícia

Okruh s jednoznačným rozkladom (alebo tiež *Gaussov okruh*) je obor integrity, v ktorom pre každý prvok $x \in R$, ktorý je nenulový a nie je deliteľom jednotky, existuje rozklad

$$x = p_1 \dots p_k$$

na súčin ireducibilných prvkov a navyše je tento rozklad jednoznačný až na asociovanosť a poradie.

Okruhy s jednoznačným rozkladom

Tvrdenie

Ak ideál (p) *v obore integrity* R *je vlastný prvoideál a* $p \neq 0$, *tak* p *je ireducibilný v* R.

Tvrdenie

Ak p *je ireducibilný prvok v OHI* R, *tak* (p) *je prvoideál.*

Dôsledok

V OHI pre ľubovoľný ireducibilný prvok p *platí implikácia*

$$p \mid ab \qquad \Rightarrow \qquad p \mid a \vee p \mid b.$$

Okruhy s jednoznačným rozkladom

Tvrdenie

Každý okruh hlavných ideálov je okruhom s jednoznačným rozkladom.