

Charakteristika poľa

22. mája 2020

Grupová mocnina

$$a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n\text{-krát}}$$

$$a^k * a^l = a^{k+l}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Charakteristika poľa

$$n \times a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-krát}}$$

- ▶ $0 \times a = 0$
- ▶ $(n + 1) \times a = n \times a + a$
- ▶ Ak $n > 0$ tak definujeme $(-n) \times a = -(n \times a)$

$$k \times a + l \times a = (k + l) \times a$$

$$k \times (l \times a) = (kl) \times a$$

$$(k \times a)(l \times b) = (kl) \times (ab)$$

Charakteristika poľa

Definícia

Charakteristika poľa F je najmenšie prirodzené číslo $k > 0$ s vlastnosťou $k \times 1 = 0$. Označujeme ju $\text{char}(F)$. Ak neexistuje k s uvedenou vlastnosťou, tak definujeme $\text{char}(F) = \infty$.

$$\text{char } F = \min\{k \in \mathbb{N}, k > 0; k \times 1 = 0\}$$

Ekvivalentne: $\text{char } F = \min\{k \in \mathbb{N}, k > 0; (\forall x \in F) k \times x = 0\}$

- ▶ $\text{char}(\mathbb{Z}_p) = p$
- ▶ $\text{char}(\mathbb{Q}) = \infty$

Charakteristika poľa

Lema

Každé konečné pole F má konečnú charakteristiku.

Tvrdenie

Charakteristika ľubovoľného poľa F je prvočíslo alebo ∞ .

Najmenšie podpole

Tvrdenie

Nech F, F' sú polia a zobrazenie $\varphi: F \rightarrow F'$ je okruhový homomorfizmus. Potom buď $\varphi[F] = \{0\}$, alebo $\varphi[F]$ je podpole F' , ktoré je izomorfné s F . (Inými slovami: zobrazenie φ je buď nulové alebo injektívne; čiže vnorenie – izomorfizmus na svoj obraz.)

Tvrdenie

Ak $\text{char } F = \infty$, tak existuje injektívny homomorfizmus z \mathbb{Q} do F . Ak $\text{char } F = p$ pre nejaké prvočíslo p , tak existuje injektívny homomorfizmus zo \mathbb{Z}_p do F .

Nadpole ako vektorový priestor

Tvrdenie

Nech K, F sú polia a K je nadpole poľa F (t.j. $K \supseteq F$ a operácie na F sú zúženia operácií na K). Potom K je vektorový priestor nad poľom F (so sčítaním a násobením skalárom rovnakým ako je sčítanie a násobenie v K).

Dôsledok

Konečné pole charakteristiky p má p^n prvkov pre nejaké $n \in \mathbb{N}$.

Frobeniov homomorfizmus

Tvrdenie

Nech $\text{char}(F) = p$ (p je prvočíslo). Potom pre ľubovoľné $a, b \in F$ platí

$$(a + b)^p = a^p + b^p$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

čiže zobrazenie $f: F \rightarrow F$, $f(x) = x^p$, je homomorfizmus (endomorfizmus poľa F).

Ďalej pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a $q = p^n$ máme

$$(a + b)^q = a^q + b^q$$

$$(ab)^q = a^q b^q$$

Frobeniov homomorfizmus

$$(a + b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \times a^k b^{p-k}.$$

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$