Algebraické rozšírenia

28. apríla 2022

Algebraické prvky

Definícia

Nech K je rozšírenie poľa F. Nech $u \in K$. Hovoríme, že prvok u je *algebraický* nad F, ak existuje nenulový polynóm $f(x) \in F[x]$, ktorého koreňom je u.
Ak každý prvok rozšírenia K je algebraický, hovoríme, že K je *algebraické rozšírenie.*

Algebraické prvky

Príklady algebraických prvkov:

- $\sqrt{3}$ je algebraický nad $\mathbb{Q}$; koreň $x^2 - 3$
- $\mathbb{C}$ je algebraický rozšírenie $\mathbb{R}$; $a + bi$ je koreň $(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Čísla, ktoré nie sú algebraické nad $\mathbb{Q}$:

- Napríklad e, π; dôkaz nie je úplne jednoduchý.
- Vieme ukázať, že $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}| = |\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}| = \mathfrak{c}$.

Minimálny polynóm

$$\{f(x) \in F[x]; f(u) = 0\}$$

Definícia

Ak u je algebraický prvok nad F, tak *minimálny polynóm* prvku u je normovaný polynóm, ktorý generuje ideál $\{f(x) \in F[x]; f(u) = 0\}$. Označujeme ho $m_u(x)$.
Stupeň algebraického prvku definujeme ako stupeň jeho minimálneho polynómu. Označujeme ho $[u : F]$.

$$[u : F] = \operatorname{st} m_u(x)$$

Minimálny polynóm

Minimálny polynóm:

- je jednoznačne určený;
- nezávisí od nadpoľa.

Príklady:

- $m_u(x) = x^2 - 3$ pre $\sqrt{3}$ nad $\mathbb{Q}$
- $m_u(x) = x^2 + 1$ pre i nad $\mathbb{C}$
- $m_u(x) = x - u$ ak $u \in F$

Minimálny polynóm

Veta

Ak u je algebraický prvok nad F a $m_u(x) \in F[x]$ je jeho minimálny polynóm. Potom $m_u(x)$ je ireducibilný polynóm nad F,

$$F(u) \cong F[x]/(m_u(x))$$

a $[u : F] = [F(u) : F]$.

Konečné a algebraické rozšírenie

Veta

Nech K je rozšírenie F a $u \in K$. Prvok u je algebraický nad F práve vtedy, keď $F(u)$ je konečné rozšírenie F.

Dôsledok

Každé konečné rozšírenie je algebraické.

Dvojnásobné rozšírenie

Tvrdenie

Nech K je konečné rozšírenie poľa L a prvky $x_1, \dots, x_n$ tvoria bázu K ako vektorového priestoru nad L. Nech L je konečné rozšírenie poľa F a prvky $y_1, \dots, y_s$ tvoria bázu L ako vektorového priestoru nad F. Potom množina $\{x_i y_j; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s\}$ tvorí bázu K ako vektorového priestoru nad F.

Dôsledok

Ak K je konečné rozšírenie poľa L a L je konečné rozšírenie poľa F, tak aj K je konečné rozšírenie poľa F a pre stupne rozšírení platí

$$[K : F] = [K : L] \cdot [L : F].$$

Dvojnásobné rozšírenie

$$k = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} d_{ij} y_j$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} d_{ij} x_i y_j$$

Dvojnásobné rozšírenie

Dôsledok

Ak $u \in L$, kde L je konečné rozšírenie poľa F, tak

$$[u : F] \mid [L : F].$$

Dôsledok

Ak u, v sú algebraické prvky nad F, tak aj ich súčet $u + v$ a súčin $u \cdot v$ sú algebraické prvky.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^0 = 1$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^1 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 = 49+20\sqrt{6}$$

$$m_u(x) = x^4 - 10x^2 + 1$$