Príklady na dôkaz matematickou indukciou

Princíp dôkazu matematickou indukciou (veľmi stručne): Chceme dokázať, že nejaké tvrdenie $P(n)$ platí pre každé číslo n.

Prvý krok: Dokážeme, že tvrdenie platí pre $n = 1$.

Indukčný krok: Dokážeme, že ak platí $P(n)$, tak platí aj $P(n+1)$.

Ak sa nám podarí zdôvodniť obe uvedené tvrdenia (t.j. $P(1)$ aj $P(n) \Rightarrow P(n+1)$), tak potom musí platiť $P(n)$ pre každé číslo n z množiny $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Poznámka: Niekedy nebudeme začínať od jednotky, ale od nejakého vyššieho čísla. Niekedy sa dá začať dokonca už od nuly.

Sumy

1. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k-1) = (n+1)^2$. (Vedeli by ste vymyslieť aj „obrázkový“ (geometrický) dôkaz? Vedeli by ste tento vzorec odvodiť z výsledkov niektorej z predošlých úloh?)
5. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
6. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
7. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$. (Je nejaký vzťah k predošlej úlohe? Dal by sa vymyslieť obrázkový dôkaz?)
8. Odvoďte indukciou vzorec pre výpočet súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti: $\sum\limits_{k=0}^{n} (a + kd) = (n+1)\frac{2a+nd}{2}$. (Inak povedané: Počet členov $\times$ priemer prvého a posledného člena.[1])
9. Odvoďte indukciou vzorec pre výpočet súčtu prvých n členov geometrickej postupnosti: $\sum\limits_{k=0}^{n} aq^k = a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.
10. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Poznámka: Prvé tri úlohy naznačujú všeobecnejšiu zákonitosť: Súčet prvých n j-tych mocnín $\sum_{k=1}^{n} k^j$ bude polynomický výraz, v ktorom vedúci člen bude

[1] Takto sa vzorec pre súčet členov aritmetickej postupnosti vcelku ľahko pamätá.

$\frac{k^{j+1}}{j+1}$. Keď sa budete učiť integrovať, oplatí sa porovnať tento výsledok s integrálom funkcie x^j. (A aj zamyslieť sa nad tým, prečo by mala byť veľkosť sumy a integrálu „rádovo“ rovnaká.) [2]

Nerovnosti

1. Dokážte, že $n! \geq 2^n$ pre $n \geq 4$.
2. Dokážte, že $2^n \geq n^2$ pre $n \geq 4$.
3. Dokážte[3] $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
4. Dokážte: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.
5. Dokážte: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.
6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí $4^n > 3^n + 2^n$.
7. * Dokážte, že pre $n \geq 3$ platí $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. (Inak povedané: Postupnosť $(\sqrt[n]{n})$ je klesajúca.)
8. Dokážte, že pre $x \geq -1$ platí $(1+x)^n \geq 1 + nx$. (Bernouilliho nerovnosť)

Poznámka: Keď sa budete učiť o limitách, tak sa budete učiť, že faktoriál rastie rádov rýchlejšie ako exponenciálna funkcia (napríklad $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$) a tiež, že exponenciálna funkcia rastie rýchlejšie ako polynóm (napríklad $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$). Z týchto výsledkov o limitách dostaneme, že nerovnosť platí pre všetky *dosť veľké* čísla; v uvedených úlohách sme zistili, od ktorého čísla presne začína platiť nerovnosť.

Fibonacciho čísla

Fibonacciho čísla sú definované podmienkami $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

pre $n = 0, 1, 2, \ldots$. (Týmto je F_n jednoznačne určené pre každé nezáporné celé číslo n.)

T.j. dostaneme postupnosť

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Pre Fibonacciho čísla platí veľa zaujímavých identít, mnohé z nich sa dajú dokazovať matematickou indukciou.

Často budeme v indukčnom kroku potrebovať platnosť tvrdenia pre predchádzajúce dve prirodzené čísla. To znamená, že v prvom kroku indukcie budeme musieť tvrdenie tiež overiť pre dve čísla (napríklad pre $n = 0$ a $n = 1$).

[2] Pozri aj: `http://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number`, `http://en.wikipedia.org/wiki/Square_pyramidal_number`, `http://en.wikipedia.org/wiki/Squared_triangular_number`, `http://en.wikipedia.org/wiki/Faulhaber's_formula#Examples`

[3] Pre zaujímavosť: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Dokážte, že $F_n \leq 2^n$.
2. Dokážte, že

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

   (Pri odvodení môže byť užitočné využívať, že pre čísla $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ platí $a + b = 1$, $a - b = \sqrt{5}$, $ab = -1$. Tieto rovnosti sa dajú overiť jednoducho dosadením, dve z nich vyplývajú aj z Vietových vzťahov.)
3. Dokážte, že $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$. (Súčet prvých n Fibonacciho čísel.)
4. Dokážte, že $\sum\limits_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
5. Dokážte, že $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
6. Dokážte, že $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$. (Tzv. Cassiniho identita.)

Silnejší predpoklad

Niekedy pri indukcii pomôže, ak dokazujeme silnejšie tvrdenie, než je v zadaní. (Pretože v indukčnom kroku máme k dispozícii silnejší predpoklad.)

1. Dokážte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < 1$. (Návod: Skúste dokázať $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.)
2. Dokážte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$. (Návod: Skúste prísť na to, čomu sa rovná suma na ľavej strane a dokázať túto rovnosť indukciou.)

Indukcia s viacerými premennými

Niekedy vystupuje v dokazovanom tvrdení viac premenných. Vtedy môže byť problém, ktorú z nich si vyberieme (vzhľadom na ktorú premennú budeme robiť indukciu). V niektorých prípadoch od toho závisí, či sa nám dôkaz podarí spraviť.

Niekedy dokonca treba robiť indukciu viackrát: Ak robíme indukciu vzhľadom na jednu premennú tak v indukčnom kroku, prípadne aj v prvom kroku indukcie, sa môže objaviť tvrdenie, ktoré dokážeme indukciou na druhú premennú.

Vyskytnú sa úlohy, kde je viacero premenných, nazvime ich napríklad m, n; hodí sa však robiť indukciu vzhľadom na ich súčet $k := m + n$ alebo maximum $k = \max\{m, n\}$.

1. Dokážte, že pre Fibonacciho čísla platí $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$. (Všimnite si, že tejto rovnosti vyplýva $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ a $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$. Vedeli by ste týchto výsledkov navrhnúť efektívny algoritmus na výpočet n-tého Fibonacciho čísla.)
2.
3.

Rôzne príklady na indukciou

1. Zo šachovnice rozmerov $2^n \times 2^n$ vyrežeme pravý horný roh. Dokážte, že takýto útvar sa dá vydláždiť dlaždicami tvaru L pozostávajúcimi z troch štvorcov. (Doplňujúca otázka: Záleží na tom, ktoré políčko šachovnice sme vyrezali?)
2. Na koľko (najviac) oblastí sa dá rovina rozdeliť n priamkami? (Návod: Ak P_n je počet oblastí, tak sa pokúste odvodiť vzťah $P_{n+1} = P_n + n + 1$. Pomocou neho by ste indukciou mohli byť schopný dokázať vzorec pre P_n.)
3.

Cauchyho indukcia

1. Dokážte nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom: Ak $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, tak platí

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

(Návod: a) Dokážte, že tvrdenie platí pre $n = 1$ (prípadne aj $n = 2$). b) Dokážte, že ak tvrdenie platí pre n, tak platí aj pre $2n$. c) Dokážte, že ak tvrdenie platí pre n, tak platí aj pre $n - 1$. d) Ako z predošlých častí vyplýva platnosť tvrdenia pre všetky prirodzené čísla n?)

Nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom je často užitočná pri dôkaze iných nerovností. Za zmienku azda stojí aj to, že rovnosť nastane práve vtedy ak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
[4]

[4] Pozri aj: http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_of_arithmetic_and_geometric_means