Príklady na dôkaz matematickou indukciou – poznámky k riešeniu niektorých úloh

Sumy

Trojuholníkové čísla

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dá sa urobiť pekný „obrázkový“ dôkaz:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number#Relations_to_other_figurate_numbers
- http://math.stackexchange.com/questions/2260/proof-for-formula-for-sum-of-sequence-34400#34400
- http://images.google.com/images?q=sum+first+n+integers

Alebo sa to dá povedať aj inak: Chceme vzorec pre $S = 1 + 2 + \cdots + n$. Zoberme si tento súčet dvakrát, ale druhýkrát ho usporiadajme v opačnom poradí.

$$2S = (1 + 2 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 1)$$

Teraz dajme dokopy dvojice na rovnakých pozíciách v prvej a druhej zátvorke. (Alebo ich môžeme podpísať pod seba, aby to bolo lepšie vidno.)

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\
 & n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\
\hline
2S = & (n+1)+ & (n+1)+ & \cdots & (n+1)+ & (n+1)
\end{array}$$

$$2S = (1+n) + (2 + (n-1)) + \cdots + ((n-1) + 2) + (n+1)$$

Na pravej strane sme dostali n zátvoriek, z ktorých každá má hodnotu $(n+1)$.

$$2S = n(n+1)$$
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Súčet prvých n štvorcov

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tu je o dosť ťažšie nájsť obrázkový dôkaz, ale ak si chceš pozrieť:

- http://math.stackexchange.com/questions/48080/proof-that-sum-limits-k-1nk2-fracnn12 48152#48152.
- http://images.google.com/images?q=sum+first+n+squares

Ukážme si na tejto sume príklad dôkazu indukciou.

Dôkaz. 1° Tvrdenie platí pre $n = 0$, vtedy dostaneme rovnosť $0 = 0$.

Platí aj pre $n = 1$. Pre $n = 1$ táto rovnosť hovorí $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

(Kľudne môžeme vyskúšať zopár ďalších hodnôt, aby sme sa presvedčili, či v zadaní nie je chyba. Napríkald pre $n = 1$ máme

$$1^2 + 2^2 = 5 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}.$$

Pre dôkaz to však nie je nutné.)

2° Predpokladáme, že platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(Indukčný predpoklad.)

Chceme overiť, či to isté tvrdenie platí ak za n dosadíme $n+1$, t.j. či

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Budeme teda upravovať

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{IP}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) \\
&= (n+1)\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\
&= (n+1)\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

V rovnosti označenej $(*)$ sme využili, že $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. Táto rovnosť sa dá overiť jednoducho roznásobením. (Pomohlo nám to, že sme vedeli, čo máme dostať, takže sme sa pozerali, či výraz $2n^2 + 7n + 6$, ktorý nám vyšiel, sa rovná výrazu $(n+2)(2n+3)$, ktorý tam chcem dostať.) $\square$

Veľa dôkazov na sumy, ktoré sa robia indukciou, je na jedno kopyto: Vieme, čo nám má vyjsť, k sume prvých n členov pripočítame $(n+1)$-vý člen a snažíme sa to upraviť na potrebný tvar. Takto to môžeme robiť, ak máme vopred zadané, čomu sa suma má rovnať – zaujímavejšia úloha by bola, keby sme mali aj prísť na to, čomu sa zadaná suma rovná.

Súčet prvých n nepárnych čísel

Tiež sa dá nájsť pekný obrázkový dôkaz:

- http://math.stackexchange.com/questions/117780/proof-by-induction-solving-135-cdots 671371#671371
- http://www.9math.com/book/sum-first-n-odd-natural-numbers
- http://images.google.com/images?q=sum+first+n+odd+numbers

Aritmetická postupnosť

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = (n+1)\frac{2a+nd}{2}$$

Tento vzorec môžeme odvodiť aj tak, že sumu najprv upravíme a potom použijeme to, čo už poznáme z predošlých úloh:

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = \sum_{k=0}^{n} a + d\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)a + d\cdot\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(a+\frac{nd}{2}\right).$$

Geometrická postupnosť

Vzorec pre súčet prvých n členov geometrickej rovnosti ľahko dostaneme zo vzorca:

$$(1+q+\cdots+q^n)(q-1) = q^{n+1}-1.$$

(Jeho platnosť nie je ťažké vidieť, keď si všimneme, aké členy pri roznásobení vypadnú. Formálny dôkaz by sme opäť robili indukciou.)

Nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \le 2-\frac{1}{n}$$

Pozrime sa na sumu začínajúcu od $k=2$:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}.$$

Ak upravíme $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, tak vidíme, že na pravej strane sme dostali *teleskopickú sumu*, v ktorej sa dá veľa členov vykrátiť:

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = (1-\frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n}$$

(Od $k=2$ sme začali kvôli tomu, aby sme vo výrazoch $\frac{1}{k-1}$ a $\frac{1}{k(k-1)}$ nemali nulu v menovateli.)

Ak pridáme aj prvý člen $\frac{1}{1^2} = 1$, tak dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Fibonacciho čísla

Cassiniho identita

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Indukčný krok:
$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_{n+1}(F_{n+1} - F_{n-1}) - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \overset{IP}{=} -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

Indukcia s viacerými premennými

Konvolúcia

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$$

Budeme tvrdenie dokazovať indukciou na m. (T.j. indukciou na m sa budeme snažiť dokázať takéto tvrdenie: Pre ľubovoľné prirodzené číslo n platí $F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$.)

1° Pre $m = 1$ máme: $F_{n+1} = F_{n+1}$, čo zjavne platí.

Pre $m = 2$ máme: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, čo je presne definícia Fibonacciho čísel.

2°: Indukčný krok (pre $m > 2$):

$$\begin{aligned}
F_{(m+1)+n} &= F_{m+n} + F_{(m-1)+n} = \\
&= F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \\
&+ F_{m-1}F_{n+1} + F_{m-2}F_n \\
&= (F_m + F_{m-1})F_{n+1} + (F_{m-1} + F_{m-2})F_n \\
&= F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n
\end{aligned}$$

Efektívny algoritmus na výpočet F_n

Vidíme, že ak si pamätáme v každom kroku F_n aj F_{n+1}; tak vieme vyrátať F_{2n} aj F_{2n+1}. Takýmto spôsobom sa vieme dostať k hodnote F_n pre zadané číslo rýchlejšie, ako keby sme používali priamo definíciu $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Úplne neefektívny spôsob by bol použiť dve rekurzívne volania $\mathrm{Fib}(n) = \mathrm{Fib}(n-1) + \mathrm{Fib}(n-2)$; lebo by sme pre mnohé hodnoty počítali to isté zbytočne veľakrát.

- `http://stackoverflow.com/questions/14661633/finding-out-nth-fibonacci-number-for-ve`
- `http://math.stackexchange.com/questions/8/how-are-we-able-to-calculate-specific-num`
- `http://stackoverflow.com/questions/13826810/fast-fibonacci-recursion`