

## 1 Binárne operácie

- 1.1. Vypíšte všetky možné binárne operácie na množine  $\{0, 1\}$ . Ktoré z nich sú asociatívne, komutatívne, majú neutrálny prvok? Pre ktoré existuje ku každému prvku aj inverzný?
- 1.2. Dokážte, že ak  $\circ$  je binárna operácia na množine  $A$  a  $\circ$  je asociatívna, tak ľubovoľné uzátvorkovanie výrazu  $a \circ b \circ c \circ d$  predstavuje ten istý prvok.<sup>1</sup>
- 1.3\*. Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce výsledky (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

## 2 Grupy

- 2.1. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
  - a)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  (celé čísla s obvyklým násobením)
  - b)  $(\mathbb{R}, \cdot)$  (reálne čísla s obvyklým násobením)
  - c)  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ , d)  $(\mathbb{C}, +)$ , e)  $(\mathbb{C}, \cdot)$ , f)  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
  - g)  $(\mathbb{R}^2, +)$  (so sčítaním definovaným po zložkách)
  - h)  $\mathbb{R}$  s operáciou  $*$ ,  $a * b = a + b - 1$
  - i)  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  s operáciou  $*$ ,  $a * b = ab + a + b$
  - j) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčítanie.
  - k) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčítanie.
  - l)  $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$
- 2.2. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine  $M$  grupu? Je táto grupa komutatívna? Urobte tabuľku grupovej operácie v prípade  $M = \{1, 2, 3\}$ .
- 2.3. Je  $(\mathbb{R}, *)$ , kde  $a * b = ab + a + b$ , grupa? Ak nie, vedeli by ste vynechať niektorý prvok  $a$  z množiny  $\mathbb{R}$  tak, aby  $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$  bola grupa?
- 2.4. Nech  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Je  $G$  s operáciou  $\cdot$  (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme  $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ . Je  $(C_n, \cdot)$  grupa?
- 2.5. Dokážte, že ak  $(G, \cdot)$  je grupa a  $x, y, z \in G$  tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z;$$

$$yx = zx \Rightarrow y = z.$$

(Tzv. *zákony o krátení* v grupe.)

- 2.6. Nech  $(G, *)$  je grupa a  $e$  je jej neutrálny prvok.. Dokážte:
  - a)  $x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$ .
  - b) Ak  $x * x = e$  pre všetky  $x \in G$ , tak  $G$  je komutatívna.
- 2.7. Ak  $(G, \circ)$  je grupa a  $a \in G$  je nejaký jej prvok, tak zobrazenie  $f_a: G \rightarrow G$  definované ako  $f_a(b) = a \circ b$  je bijekcia.
- 2.8. Nech  $(G, \circ)$  je grupa. Dokážte, že zobrazenie  $f: G \rightarrow G$  definované ako  $f(a) = a^{-1}$  je bijekcia.
- 2.9\*. Nech  $G$  je neprázdna množina a  $\circ$  je asociatívna binárna operácia na  $G$ . Potom  $G$  je

<sup>1</sup>Máme tu na mysli uzátvorkovania *bez výmeny poradia*, ktoré už jednoznačne určujú výsledok operácie. Aspoň bez dôkazu spomeniem, že to isté platí aj pre ľubovoľný počet prvkov. Počet uzátvorkovaní výrazu s  $n$  prvkami je  $n$ -té *Catalanove číslo*.

grupa práve vtedy, keď pre ľubovoľné  $a, b \in G$  majú rovnice

$$\begin{aligned} a \circ x &= b \\ y \circ a &= b \end{aligned}$$

riešenie v  $G$  (inými slovami, pre ľubovoľné  $a, b \in G$  existujú  $x, y \in G$ , ktoré spĺňajú tieto dve rovnosti.)

2.10\*. Nech  $G$  je konečná množina a  $\circ$  je binárna operácia na  $G$  taká, že platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že  $G$  je grupa.

2.11\*. Nech  $*$  je binárna operácia na množine  $G$ , ktorá je

a) asociatívna,

b) existuje prvok  $e \in G$  taký, že  $(\forall x \in G) e * x = x$

c) pre každý prvok  $x \in G$  existuje  $y \in G$  také, že  $x * y = e$  (kde  $e$  označuje prvok z časti

b) t.j.

$$(\forall x \in G)(\exists y \in G)y * x = e.$$

Dokážte, že potom  $(G, *)$  je grupa. (Všimnite si, že uvedené podmienky sa síce podobajú na definíciu neutrálneho a inverzného prvku, ale v oboch prípadoch tam máme iba jednu z dvoch rovností, ktoré vystupujú v definícii.)

2.12. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že  $a \circ a = e$ .

2.13. Nech konečná množina  $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$  tvorí s operáciou  $*$  komutatívnu grupu a  $e$  je jej neutrálny prvok. Dokážte, že  $(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^2 = e$ .

2.14. Nech  $*$  je binárna operácia na množine  $A$ , taká, že pre každé  $a, b, c \in A$  platí  $a * (b * c) = (a * c) * b$  a  $*$  má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia  $*$  je komutatívna a asociatívna.

2.15. Nech  $(G, \circ)$  je grupa. Dokážte, že ak  $x \circ x = x$ , tak  $x = e$ .

2.16. Zistite, či  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$ , kde pre každé  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  definujeme  $(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d)$ , je grupa.

2.17. Nech  $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . Definujme na tejto množine binárnu operáciu  $*$  predpisom  $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$ . Je to skutočne binárna operácia? Je  $(G, *)$  grupa? Je to komutatívna grupa?

2.18. Nech  $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ . Definujme na tejto množine binárnu operáciu  $*$  predpisom  $(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$ . Je to skutočne binárna operácia? Je  $(G, *)$  grupa? Je to komutatívna grupa?

2.19. Nech  $(G, *_G)$  a  $(H, *_H)$  sú grupy. Dokážte, že aj  $G \times H$  s operáciou  $*$  definovanou ako

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$

je grupa.

	a	b	c	d
a				
b				d
c			d	
d				

2.20. Doplnite nasledujúcu tabuľku tak aby ste dostali grupu.

2.21. Ak pre každý prvok  $x$  grupy  $(G, \circ)$  platí  $x \circ x = e$ , tak táto grupa je komutatívna.

2.22. Nech  $G$  je grupa,  $e$  je jej neutrálny prvok a  $a, b \in G$ . Ukážte, že ak  $(ab)^2 = e$ , tak aj  $(ba)^2 = e$ .