Tabuľka grupy S_3:

	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
id	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	id
$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$	id	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$

1 Podgrupy

H je podgrupa grupy $(G,*)$ ak:

- pre ľubovoľné $x,y\in H$ platí $x*y\in H$ a $x^{-1}\in H$;
- pre ľubovoľné $x,y\in H$ platí $x*y^{-1}\in H$.

Každá podgrupa obsahuje neutrálny prvok.

1.1. Nájdite všetky podgrupy grupy S_3. (LAG1 1.4.6.(8))

1.2. Ukážte, že $H=\{\frac{m}{n};m,n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$.

1.3. Je množina $A=\{a+b\sqrt{2};a,b\in\mathbb{Q}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{R},+)$?

1.4. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Viete na základe výsledku zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?)

1.5. Je množina $H=\{\ln a;a\in\mathbb{Q},a>0\}$ podgrupou grupy $(\mathbb{R},+)$?

1.6. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g\in G$. Ukážte, že $gHg^{-1}=\{ghg^{-1};h\in H\}$ je podgrupa grupy G.

1.7. Nech $M\neq\emptyset$ a G je množina všetkých bijektívnych zobrazení z M do M. Je $\circ$ binárna operácia na G? Je $(G,\circ)$ grupa? Je komutatívna?

1.8. Uvažujme funkcie $f_i\colon\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ definované ako $f_1(x)=x$, $f_2(x)=1/x$, $f_3(x)=1-x$, $f_4(x)=1/(1-x)$, $f_5(x)=(x-1)/x$, $f_6(x)=x/(x-1)$. Dokážte, že $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$ s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu. Zostavte tabuľku grupovej operácie a zistite, či je táto grupa izomorfná s grupou S_3.

1.9. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)

1.10*. Nech G je grupa a H_1, H_2 sú jej podgrupy. Dokážte, že $H_1\cup H_2$ je podgrupa práve vtedy, keď $H_1\subseteq H_2$ alebo $H_2\subseteq H_1$.

1.11*. Ak A, B, C sú podgrupy grupy G a $C\subseteq A\cup B$, tak $C\subseteq A$ alebo $C\subseteq B$.

2 Homomorfizmy grúp

$f\colon(G,*)\to(H,\Box)$

$$f(x*y)=f(x)\Box f(y)$$

2.1. Dokážte: Nech $(G,*)$ a $(H,\circ)$ sú grupy a G je komutatívna. Ak existuje izomorfizmus $f\colon G\to H$, tak aj $(H,\circ)$ je komutatívna grupa. (Teda grupa izomorfná s komutatívnou grupou je komutatívna.) Platí toto tvrdenie, ak predpoklad o existencii izomorfizmu nahradíme požiadavkou na existenciu homomorfizmu? Čo sa stane, ak budeme požadovať existenciu surjektívneho homomorfizmu (=epimorfizmu)?

2.2. Zistite, či sú grupy $(\mathbb{Z}_4,+)$ a $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\},\cdot)$ izomorfné.

2.3. Sú grupy $(S_3,\circ)$ a $(\mathbb{Z}_6,+)$ izomorfné?

2.4. Sú grupy $(\mathbb{Z}_6,+)$ a $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3,+)$ izomorfné? (Operáciu $+$ na množine $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ chápeme po zložkách, t.j. $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1\oplus_2 x_2,y_1\oplus_3 y_2)$. Operácie $\oplus_2$ a $\oplus_3$ označujú sčitovanie modulo 2 resp. modulo 3 – na tomto mieste som použil iné označenie, aby som zdôraznil, že na prvej a na druhej súradnici máme inú operáciu.)

2.5. Sú grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ izomorfné?

2.6. Nájdite všetky homomorfizmy $(S_3, \circ) \to (\mathbb{Z}_2, +)$.

2.7. Nech $(G, *)$ je ľubovoľná grupa. Dokážte, že zobrazenie $g \mapsto g * g$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.

2.8. Dá sa výsledok z predchádajúceho cvičenia použiť na iný dôkaz toho, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$ platí pre konečnú komutatívnu grupu $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$?

2.9. Nech $f, g\colon G \to H$ sú homomorfizmy grúp. Je množina $\{a \in G; f(a) = g(a)\}$ podgrupa grupy G?