

## 1 Vektorové priestory

$(V, +, \cdot)$  je vektorový priestor nad  $R$  ak  $+: V \times V \rightarrow V$ ,  $\cdot: R \times V \rightarrow V$  a platí

- $(V, +)$  je komutatívna grupa;
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$  pre ľubovoľné  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\vec{x} \in V$ ;
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$  pre ľubovoľné  $\alpha \in R$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ;
- $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$  pre ľubovoľné  $\alpha, \beta \in R$ ,  $\vec{x} \in V$ ;
- $1\vec{x} = \vec{x}$  pre ľubovoľné  $\vec{x} \in V$ .

- 1.1. Ukážte, že  $\mathbb{R}$  je vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{Q}$ .
- 1.2. Koľko prvkov má vektorový priestor  $(\mathbb{Z}_3)^n$ ? Čomu sa v tomto priestore rovná  $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ ?
- 1.3. Zistite, či  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  s operáciami  $+$  a  $\cdot$  definovanými tak, že  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  pre ľubovoľné  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  a  $r \cdot (a, b) = (ra, 2rb)$  pre ľubovoľné  $r \in \mathbb{R}$ , je vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$ .
- 1.4. Zistite, či  $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$  je vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$ , ak definujeme  $x \oplus y = xy$ ,  $c \odot x = x^c$  pre  $x, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

## 2 Podpriestory

Ak  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $R$  a  $M$  je neprázdna podmnožina  $V$ , tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- $M$  je podpriestor priestoru  $V$ .
- Pre ľubovoľné  $\vec{x}, \vec{y} \in M$  a  $\alpha \in R$  platí  $\vec{x} + \vec{y} \in M$ ,  $\alpha\vec{x} \in M$ .
- Pre ľubovoľné  $\vec{x}, \vec{y} \in M$  a  $\alpha, \beta \in R$  platí  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in M$ .

Ak  $M$  je podpriestor, tak  $\vec{0} \in M$ . (Každý podpriestor obsahuje nulový vektor.)

- 2.1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru  $\mathbb{R}^3$ ?
  - a)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
  - b)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
  - c)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
  - d)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
  - e)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
  - f)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
  - g)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
  - h)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
  - i)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
  - j)  $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ .
- 2.2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ?
  - a) funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s vlastnosťou  $2f(0) = f(1)$
  - b) nezáporné funkcie
  - c) funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s vlastnosťou  $f(1) = 1 + f(0)$
  - d) funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s vlastnosťou  $(\forall x \in (0, 1)) f(x) = f(1 - x)$
  - e) ohraničené funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - f) spojité funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - h) funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že existuje konečná  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
  - i\*) funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  také, že existuje konečná alebo nekonečná  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- 2.3. Nech  $S, T$  sú podpriestory vektorového priestoru  $V$  nad poľom  $F$ . Ukážte, že  $S \cup T$  je podpriestor priestoru  $V$  práve vtedy, keď  $S \subseteq T$  alebo  $T \subseteq S$ .
- 2.4. Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $F$  a  $S \neq \emptyset$  je podmnožina  $V$ . Ukážte, že  $S$  je podpriestor  $V$  práve vtedy, keď pre ľubovoľné  $c \in F$  a  $\vec{a}, \vec{\beta} \in S$  platí  $c\vec{a} + \vec{\beta} \in S$ .