

Ak A je typu $m \times \boxed{n}$ a B je typu $\boxed{n} \times k$, tak súčin $C = AB$ má rozmery $m \times k$ a

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj}.$$

Matica lineárneho zobrazenia $f: R^k \rightarrow R^n$ je matica typu $k \times n$ nad polom R , ktorej i -ty riadok je vektor $f(\vec{e}_i)$, t.j. obraz i -teho vektora zo štandardnej bázy.

Súčin matic a skladanie lineárnych zobrazení:

$$M_{g \circ f} = M_f \cdot M_g$$

Obraz vektora a súčin:

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot M_f$$

1 Lineárne zobrazenia

- 1.1. Nech V a W sú vektorové priestory nad polom F a $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie. Ak $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne závislé vektory, tak aj $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne závislé vektory.
- 1.2. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad polom F . Dokážte:
 - Ak S je podpriestor vektorového priestoru V , tak $f[S] = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in S\}$ je podpriestor vektorového priestoru W .
 - Ak T je podpriestor vektorového priestoru W , tak $f^{-1}[T] = \{\vec{\alpha} \in V : f(\vec{\alpha}) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru V .

2 Súčin matic

- 2.1. Vypočítajte $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 2BA + B^2$, $A^2 + AB + BA + B^2$, $(A + B)^2$, ak $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- 2.2. Vyrátajte EA a AE pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vedeli by ste nájsť riadkovú/stĺpcovú operáciu, pomocou ktorej dostaneme z matice A maticu EA resp. AE ? (Viac sa o súvisie násobenia matic a elementárnych riadkových/stĺpcových operácií môžete dozvedieť v LAG1 v časti 4.4).
- 2.3. Pre štvorcovú maticu C typu $n \times n$ budeme výraz $\text{Tr}(C) = \sum_{k=1}^n c_{kk}$ nazývať *stopa matice* C .
 - Ukážte, že ak A, B sú matice typu $n \times n$ nad polom F , tak platia rovnosti $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A)^T$ a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
 - Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CBA)$ a $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite!) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, matica A je symetrická?
- 2.4. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $S_C \subseteq S_A$? Musí platiť $S_C \subseteq S_B$? Musí platiť $S_A \subseteq S_C$, $S_B \subseteq S_C$? (Pripomeňme, že S_A je podpriestor generovaný riadkami matice A .)
- 2.5. Nech A, B sú matice nad polom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.
- 2.6. Nech A, B sú matice nad polom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

- 2.7. Nech $A, B \in M_{m,n}(F)$. Dokážte: Matice A, B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď existuje regulárna matica $R \in M_{m,m}(F)$ taká, že $B = RA$.

3 Matica zobrazenia

- 3.1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$ a napíšte jeho predpis.
 a) $f(1, 1) = (0, 1)$, $f(6, 1) = (3, 2)$
 b) $f(2, 3) = (1, 0)$, $f(3, 2) = (6, 1)$
- 3.2. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, pre ktoré platí:
 a) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(3, 1, 2) = (1, -1, 1, -1)$,
 b) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(2, -1, 4) = (-1, 1, -1, 2)$,
 c) $f(2, 0, 3) = (1, 2, -1, 1)$, $f(4, 1, 5) = (4, 5, -2, 1)$, $f(2, -1, 4) = (1, -1, 1, -1)$.
- 3.3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takého, že:
 a) $f(1, 2, 3, 3) = (0, 0, 0, 0)$, $f(1, 1, 3, 2) = (1, 0, 3, 1)$, $f(1, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$, $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$
 b) $f(1, 2, 3, 4) = (-1, -1, 4, 1)$, $f(1, 1, 3, 2) = (1, 0, 3, 1)$, $f(1, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$, $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$
 c) $f(0, 1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0)$, $f(1, 0, 1, 1) = (0, 1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$, $f(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$
- 3.4. Kolko existuje lineárnych zobrazení spĺňajúcich zadané podmienky? Kolko z nich je injektívnych? Kolko je surjektívnych?
 a) $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^4$, $f(1, 3, 1) = (1, 1, 1, 3)$, $f(2, 1, 3) = (0, 1, 3, 4)$, $f(2, 1, 0) = (1, 4, 0, 0)$;
 b) $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$, $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$, $f(1, 1, 4, 1) = (2, 2, 1)$;
 c) $f: \mathbb{Z}_5^4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f(1, 0, 3, 1) = (0, 1, 3)$, $f(2, 1, 3, 1) = (1, 1, 3)$, $f(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0)$;

4 Jadro a obraz

- 4.1. Nájdite bázu obrazu a bázu jadra lineárneho zobrazenia $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ s danou maticou. V ktorých prípadoch je toto zobrazenie surjektívne a v ktorých injektívne?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- 4.2. Nájdite bázu a dimenziu $\text{Ker } f$ aj $\text{Im } f$ pre dané lineárne zobrazenie. Rozhodnite, či toto zobrazenie je injektívne, surjektívne, bijektívne.
 a) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4, 4x_2 + 2x_3 + 2x_4)$.
 b) $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$, $f: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$
 c) $f: V \rightarrow V$, kde $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $f: p(x) \mapsto p'(x)$. (T.j. f priradí polynómu $p(x)$ jeho deriváciu.)
- 4.3. Definujme lineárne zobrazenie $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$ a označme $U_1 = \text{Ker } f$.
 Ďalej definujme lineárne zobrazenie $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ako $g(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_1 - 3y_2, 2y_1 - 8y_2, 3y_1 - 27y_2)$ a označme $U_2 = \text{Im } g$.
 Vidíme, že U_1 aj U_2 sú podpriestory \mathbb{R}^4 .
 Nájdite bázy priestorov $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ a $U_1 + U_2$.
- 4.4. Nech $f: V \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie. Ako f^2 budeme označovať $f \circ f$. Dokážte
 (a) $\text{Ker } f^2 \supseteq \text{Ker } f$,
 (b) $\text{Im } f^2 \subseteq \text{Im } f$,
 (c) $f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } f \supseteq \text{Im } f$.

4.5. Nájďte $\text{Ker } T_A$, $\text{Im } T_A$, kde $T_A: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ je dané predpisom

$$T_A(X) = AX - XA$$

pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, t.j.,

$$T_A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.6. Nech A je ľubovoľná matica typu $n \times n$ nad polom F . Označme $T_A(X) = AX - XA$.

- Ukážte, že $T_A: M_{n,n}(F) \rightarrow M_{n,n}(F)$ je lineárne zobrazenie.
- Je T_A injektívne?
- Je T_A surjektívne?

5 Inverzná matica

5.1. Nájďte inverznú maticu k daným maticiam nad \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Výsledky:}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2. Zistite, či je zadaná matica nad polom \mathbb{Z}_5 regulárna; ak áno, nájdite inverznú:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{Výsledky: } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3. Nech $f: (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1, 2, 3, 1) = (2, 0, 1, 0)$, $f(0, 2, 3, 1) = (1, 2, 0, 3)$, $f(1, 0, 3, 4) = (3, 2, 1, 0)$, $f(4, 1, 3, 2) = (2, 3, 1, 1)$. Nájďte maticu zobrazenia f^{-1} .

5.4. Zistite, či $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je regulárna a) nad \mathbb{Z}_2 b) nad \mathbb{Z}_3 , ak áno, nájdite inverznú.

5.5. Zistite pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ existuje A^{-1} . Pre tieto hodnoty aj vyjadrite, čomu sa A^{-1} rovná.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

5.6. Vypočítajte $A^{-1}B$ a $B^{-1}A$. Skúste to urobiť bez výpočtu A^{-1} resp. B^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ako skúšku správnosti môžete vyskúšať, či po vynásobení výsledku zľava maticou A (resp. B) dostanete maticu B (resp. A).

5.7. Zistite, či pre dané matice A, B nad polom \mathbb{Z}_5 existuje matica X nad tým istým polom taká, že $AX = B$. Zistite, či je X maticami A, B jednoznačne určená. Ak taká matica existuje, tak aspoň jednu takú maticu nájdite.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{b) } A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \\ \text{e) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{f) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 5.8. Ukážte, že ak A, B, C sú štvorcové matice také, že $ABC = I$, tak matica B je regulárna a platí $B^{-1} = CA$.
- 5.9*. Ukážte, že ak A je horná trojuholníková matica rozmerov $n \times n$, ktorá je regulárna, tak aj A^{-1} je horná trojuholníková. (Pod pojmom horná trojuholníková matica sa rozumie to, že pod diagonálou sú nuly. T.j. $a_{ij} = 0$ pre $i < j$.)

6 Opäť sústavy

- 6.1. Ukážte, že každý podpriestor R^n je množina riešení nejakej sústavy lineárnych rovníc nad poľom R . (LAG1 - 5.2.8(1))
- 6.2. Nájdite nejakú homogénnu sústavu rovníc so 4 neznámymi nad \mathbb{R} , ktorej riešením je daný podpriestor:
- $S = [(1, 4, 0, 1), (1, 0, 3, -3), (0, 2, 0, 1)]$
 - $S = [(1, -1, 1, -2), (1, 1, 0, -1), (3, 1, 1, -4)]$
- 6.3. Pre dané podpriestory S, T priestoru V nájdite bázu a dimenziu $S \cap T$. Viete zistiť aj čomu sa rovná dimenzia $S + T$?
- $S = [(2, 0, 3, 1), (1, -1, 0, 0)], T = [(1, -1, -1, 0), (0, 2, 4, 1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
 - $S = [(1, 0, 1, -2), (1, 1, -1, 3)], T = [(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 1), (2, -1, -1, 1)]$ vo $V = \mathbb{R}^4$
 - $S = [(1, 1, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 3, -2), (1, 0, 1, 0, 0)]$ a $T = [(1, 1, 0, 0, 3), (1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, -1, 0)]$ vo $V = \mathbb{R}^5$
- Výsledky: a) $\dim(S) = \dim(T) = 2, \dim(S \cap T) = 1, \dim(S + T) = 3$; b) $\dim(S) = 2, \dim(T) = 3, \dim(S \cap T) = 1, \dim(S + T) = 4$; c) $\dim(S) = 3, \dim(T) = 3, \dim(S \cap T) = 1, \dim(S + T) = 5$