Termín na odovzdanie: cvičenia počas druhého týždňa semestra.

A

Dokážte **matematickou indukciou**, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

(T.j. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.)

B

Dokážte **matematickou indukciou**, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(T.j. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.)

C

Dokážte **matematickou indukciou**, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

(T.j. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.)

Skupina, ktorú riešite:
A: DBa, DBe, VF, VG, HK, KM, BS, MT, RV, AV
B: SB, TDD, KF, MKv, SAK, MF, NN, KS, TŠ, MZ
C: MKa, TK, DMa, DMi, MPj, MPo, BR, LV, AT, MŽ
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Termín na odovzdanie: cvičenia počas tretieho týždňa semestra, t.j. 8. októbra 2021.

Zistite, či dané tvrdenie platí – ak áno, tak ho dokážte; ak nie, tak nájdite kontrapríklad. (T.j. ako odpoveď očakávam, že jasne napíšete, či si myslíte, že uvedené tvrdenie platí. Ak je odpoveď áno, tak treba napísať argument **prečo** – teda nejaký dôkaz uvedeného tvrdenia. Ak je odpoveď nie, tak treba uviesť **konkrétny** kontrapríklad ukazujúci, že toto tvrdenie neplatí.)

Všetky skupiny majú otázku o implikácii

$$f \circ f \circ f = f \circ f \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ f = f,$$

menia sa však predpoklady, ktoré vieme o zobrazení f.

A

Nech $M \neq \emptyset$ je množina a $f \colon M \to M$ je zobrazenie. Ak platí $f \circ f \circ f = f \circ f$, tak platí aj $f \circ f = f$.

B

Nech $M \neq \emptyset$ je množina a $f \colon M \to M$ je zobrazenie. Ak f je injektívne a platí $f \circ f \circ f = f \circ f$, tak platí aj $f \circ f = f$.

C

Nech $M \neq \emptyset$ je množina a $f \colon M \to M$ je zobrazenie. Ak f je surjektívne a platí $f \circ f \circ f = f \circ f$, tak platí aj $f \circ f = f$.

D

Nech $M \neq \emptyset$ je množina a $f \colon M \to M$ je zobrazenie. Ak f je bijektívne a platí $f \circ f \circ f = f \circ f$, tak platí aj $f \circ f = f$.

Skupina, ktorú riešite:
A: VF, VG, SAK, KM, BS, MT, RV, AV
B: SB, MKv, MF, HK, LV, MPo, MZ
C: MKa, TK, DMa, DMi, NN, MPj, BR, MŽ
D: DBa, DBe, TDD, KF, KS, TŠ, AT,
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 8. októbra 2021.
Termín na odovzdanie: cvičenia počas tretieho týždňa semestra, t.j. 15. októbra 2021.

Nech $(G,*)$ je grupa. Označme $\mathcal{P}(G) = \{A; A \subseteq G\}$ množinu všetkých podmnožín G. Pre ľubovoľné $A, B \subseteq G$ definujme

$$A * B = \{a * b; a \in A, b \in B\}.$$

Tým sme zadefinovali binárnu operáciu[1] na množine $\mathcal{P}(G)$. Zistite, či dané tvrdenie platí – ak áno, tak ho dokážte; ak nie, tak nájdite kontrapríklad. (T.j. buď očakávam zdôvodnenie, že uvedené tvrdenie platí pre ľubovoľnú grupu $(G,*)$. Alebo nejaký konkrétny príklad grupy, pre ktorú uvedené tvrdenie neplatí – spolu so zdôvodnením, prečo je to tak.)[2][3]

(A) Existuje množina $A \in \mathcal{P}(G)$ taká, že $A * A = A$.

(B) Existuje množina $A \in \mathcal{P}(G)$ taká, že rovnosť $A * B = A$ platí pre všetky $B \in \mathcal{P}(G)$.

(C) Binárna operácia $*$ na množine $\mathcal{P}(G)$ má neutrálny prvok.

(D) Binárna operácia $*$ na množine $\mathcal{P}(G)$ je komutatívna.

Skupina, ktorú riešite:
A: KF, VF, HK, DMi, BS, MT, AT,AV
B: SB, MKa, TDD, TK, MPj, MPo, LV, MZ
C: MKv, SAK, DMa, KM, NN, KS, MŽ
D: DBa, DBe, MF, VG, BR, TŠ, RV,
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

[1] Fakt, že to je naozaj binárna operácia berte ako zadaný – toto nemusíte zdôvodňovať.

[2] Symbol $*$ tu používame v dvoch významoch - raz ako grupovú operáciu na množina G, raz ako označenie pre binárnu operáciu na $\mathcal{P}(G)$. Už ste asi na niečo takéto zvyknutí – videli ste viacero situácií, kedy sme rovnaký symbol použili pre rôzne veci. Samozrejme, ak sa vám tak bude pracovať lepšie, pokojne ich môžete označiť rôzne. V zadaní som použil rovnaké označenie, keďže je to v tejto situácii pomerne prirodzené a často sa to presne takto používa.

[3] Ak vám je zadanie úlohy nejasné, možno pomôže, ak si ho najprv vyskúšate rozmyslieť na príklade nejakej konkrétnej grupy. Napríklad si môžete zobrať grupu $(\mathbb{Z},+)$ a skúsiť si pre niektoré podmnožiny $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ si rozmyslieť, čomu sa rovná $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.

Zverejnená: 8. októbra 2021.
Termín na odovzdanie: cvičenia počas štvrtého týždňa semestra, t.j. 22. októbra 2021.

Uvažujme funkcie $f_i\colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ definované ako

$$id(x) = f_1(x) = x \qquad f_4(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_5(x) = \frac{x-1}{x}$$
$$f_3(x) = 1-x \qquad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

Označme $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$. Platí, že zloženie dvoch funkcií z G opäť patrí do G. (Toto berte ako zadaný fakt, ktorý netreba overovať – aj keď toto vlastne dostaneme, ak dáme dokopy veci, ktoré vypočítate pri riešení úloh v jednotlivých skupinách.)

1. Zistite, či každý prvok $f_i \in G$ je bijekcia a či G obsahuje aj inverznú funkciu f_i^{-1}.
2. Zdôvodnite, že G s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu.
3. Vypočítajte, čomu sa rovnajú zložené zobrazenia uvedené pre vašu skupinu. (Uveďte aj postup, ktorým ste sa dostali k výsledku.)
   (A) $f_2 \circ f_3$, $f_3 \circ f_2$, $f_2 \circ f_4$, $f_3 \circ f_5$, $f_4 \circ f_3$
   (B) $f_2 \circ f_6$, $f_6 \circ f_2$, $f_2 \circ f_5$, $f_6 \circ f_4$, $f_5 \circ f_6$
   (C) $f_3 \circ f_6$, $f_6 \circ f_3$, $f_3 \circ f_4$, $f_6 \circ f_5$, $f_5 \circ f_3$
   (D) $f_4 \circ f_4$, $f_5 \circ f_5$, $f_4 \circ f_2$, $f_4 \circ f_6$, $f_5 \circ f_2$

Toto už nie je súčasťou zadania – ale môžete sa zamyslieť aj nad tým, či sa nejako viete presvedčiť, že táto grupa je izomorfná s grupou $(S_3, \circ)$.

$\circ$	id	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
id						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

Skupina, ktorú riešite:
A: VF, VG, MKa, HK, BS, MT, AT, MZ
B: DBe, SB, TK, NN, MPj, MPo, LV, AV
C: MKv, SAK, KM, DMa, DMi, TŠ, MŽ
D: DBa, TDD, MF, KF, BR, KS, RV,
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 21. októbra 2021.
Termín na odovzdanie: cvičenia počas štvrtého týždňa semestra, t.j. 29. októbra 2021.

V každej zo skupín je zadaná nejaká relácia R na množine $\mathbb{R}$.

1. Ukážte, že R je relácia ekvivalencie na $\mathbb{R}$.
2. Zistite, či je množina tried ekvivalencie konečná alebo nekonečná.
3. Je niektorá z tried ekvivalencie jednoprvková? Ak áno, uveďte aspoň jeden príklad takej triedy.
4. Je niektorá z tried ekvivalencie konečná? Ak áno, uveďte aspoň jeden príklad takej triedy.
5. Je niektorá z tried ekvivalencie nekonečná? Ak áno, uveďte aspoň jeden príklad takej triedy.

   (A) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^4 = y^4\}$
   (B) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; |x| = |y|\}$
   (C) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \sin x = \sin y\}$
   (D) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; e^x = e^y\}$

Skupina, ktorú riešite:
A: MF, VG, MKv, HK, BR, MT, AT, MŽ
B: DBe, TDD, KM, DMi, MPj, BS, KS, AV
C: MKa, SAK, TK, DMa, NN, TŠ, MZ
D: DBa, SB, KF, VF, MPo, LV, RV,
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 27. októbra 2021.
Termín na odovzdanie: na cvičení 5. novembra 2021.

Pre zadané grupy G a G' nájdite takú podgrupu H grupy G, že platí $G/H \cong G'$. (Alebo zdôvodnite, že taká podgrupa H v grupe G neexistuje.)

(A) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_3, +)$

(B) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_4, +)$

(C) $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_4, +)$

(D) $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_2, +)$

Skupina, ktorú riešite:
A: MF, VF, MKv, TK, BR, MT, RV, MŽ
B: KF, MKa, KM, DMi, MPo, BS, TŠ, MZ
C: DBe, SAK, HK, DMa, NN, KS, AV
D: DBa, SB, TDD, VG, MPj, LV, AT,
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 3. novembra 2021.
Termín na odovzdanie: na cvičení 12. novembra 2021. (Ak by sa medzičasom prešlo na dištančnú výuku, tak stále platí ten istý dátum – formu odovzdania upresním.)

Tvorí zadaná podmnožina množiny $\mathbb{R}$ (spolu s obvyklým sčitovaním a násobením reálnych čísel) pole? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

(A) $F_1 = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$

(B) $F_2 = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}\}$

(C) $F_3 = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Z}\}$

(D) $F_4 = \{a + b\sqrt{5}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

Skupina, ktorú riešite:
A: MF, VF, MKv, TK, BR, MT, RV, MŽ
B: KF, MKa, KM, DMi, MPo, BS, TŠ, MZ
C: DBe, SAK, HK, DMa, NN, KS, AV
D: DBa, SB, TDD, VG, MPj, LV, AT,
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 12. novembra 2021.
Termín na odovzdanie: na cvičení 19. novembra 2021.

Pre zadané množiny $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ zistite, či S, T a $S \cap T$ sú podpriestory vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

(A) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + 3z = 0\}$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x| = |y|\}$

(B) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - 2z = 0\}$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 0\}$

(C) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y - z = 0\}$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 = y^2\}$

(D) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0\}$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |x + y| = |x - y|\}$

Skupina, ktorú riešite:
A: DBa, DBe, VF, VG, HK, KM, BS, MT, RV, AV
B: SB, TDD, KF, MKv, SAK, MF, NN, KS, TŠ, MZ
C: MKa, TK, DMa, DMi, MPj, MPo, BR, LV, AT, MŽ
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 18. novembra 2021.
Termín na odovzdanie: na cvičení 26. novembra 2021.

A

Nájdite riešenia zadanej sústavy lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{R}$ s neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4. Zapíšte, ako vyzerá množina riešení.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

B

Nájdite riešenia zadanej sústavy lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{R}$ s neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4. Zapíšte, ako vyzerá množina riešení.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

C

Nájdite riešenia zadanej sústavy lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{R}$ s neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4. Zapíšte, ako vyzerá množina riešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Skupina, ktorú riešite:
A: DBa, TDD, VF, VG, HK, DMa, KS, MT, AT, MZ
B: SB, KF, SAK, TK, NN, MPj, MPo, BS, TŠ, AV
C: DBe, MF, MKa, MKv, KM, DMi, BR, LV, RV, MŽ
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 26. novembra 2021.
Termín na odovzdanie: piatok 3. decembra 2021 (cez Assignments v MS Teams alebo mailom).

Nájdite všetky hodnoty parametra $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré zadané vektory tvoria bázu priestoru $\mathbb{R}^4$.

(A) $\vec{x}_1 = (1, t, 1, t)$, $\vec{x}_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{x}_4 = (1, 0, 1, -1)$

(B) $\vec{x}_1 = (1, t, 1, t)$, $\vec{x}_2 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{x}_3 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{x}_4 = (0, 1, 1, 3)$

(C) $\vec{x}_1 = (1, t, 1, t)$, $\vec{x}_2 = (2, 1, 3, 0)$, $\vec{x}_3 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{x}_4 = (1, 1, 1, -1)$

Skupina, ktorú riešite:
A: DBa, TDD, VF, VG, HK, DMa, KS, MT, AT, MZ
B: SB, KF, SAK, TK, NN, MPj, MPo, BS, TŠ, AV
C: DBe, MF, MKa, MKv, KM, DMi, BR, LV, RV, MŽ
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 3. decembra 2021.
Termín na odovzdanie: piatok 10. decembra 2021 (cez Assignments v MS Teams alebo mailom).

Pre zadané vektory nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, že $f(\vec{x}_i) = \vec{y}_i$ pre $i = 1, 2, 3$ a súčasne $\vec{z}_1 \notin \mathrm{Im}(f)$. (T.j. $\vec{z}_1$ je „zakázaný" vektor, ktorý nesmie byť funkčnou hodnotou.) Ak takých zobrazení existuje viacero, stačí nájsť jednu takú maticu. Ak také zobrazenie neexistuje, zdôvodnite prečo.

(A) $\vec{x}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{y}_1 = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{y}_2 = (2, 1, 3, 2)$, $\vec{x}_3 = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{y}_3 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{z}_1 = (1, 1, 1, 1)$

(B) $\vec{x}_1 = (1, 3, 1, 0)$, $\vec{y}_1 = (1, -2, 1, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{y}_2 = (2, 1, -1, 2)$, $\vec{x}_3 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{y}_3 = (1, -1, 1, 1)$, $\vec{z}_1 = (1, 2, 1, 0)$

(C) $\vec{x}_1 = (3, 3, 1, 1)$, $\vec{y}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 1, 3)$, $\vec{y}_2 = (0, 1, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{y}_3 = (1, 1, 2, 2)$, $\vec{z}_1 = (1, 1, 1, 1)$

Skupina, ktorú riešite:
A: DBa, TDD, VF, VG, HK, DMa, KS, MT, AT, MZ
B: SB, KF, SAK, TK, NN, MPj, MPo, BS, TŠ, AV
C: DBe, MF, MKa, MKv, KM, DMi, BR, LV, RV, MŽ
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 10. decembra 2021.
Termín na odovzdanie: piatok 17. decembra 2021 (cez Assignments v MS Teams alebo mailom).

Nájdite jadro a obraz a vypočítajte aj $\dim(\operatorname{Ker} f)$, $\dim(\operatorname{Im} f)$ pre zobrazenie $f\colon \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^4$ zadané ako $f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A$, kde:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Skupina, ktorú riešite:
A: DBa, TDD, VF, VG, HK, DMa, KS, MT, AT, MZ
B: SB, KF, SAK, TK, NN, MPj, MPo, BS, TŠ, AV
C: DBe, MF, MKa, MKv, KM, DMi, BR, LV, RV, MŽ
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

Zverejnená: 17. decembra 2021.
Termín na odovzdanie: nedeľa 9. januára 2022, t.j. koniec prvého týždňa skúškového obdobia (cez Assignments v MS Teams alebo mailom).
Toto je posledné zadanie na tento semester.

A

Pre zadané podpriestory S, T priestoru $\mathbb{R}^4$ nájdite bázu a dimenziu priestorov $S+T$ a $S\cap T$. (Do riešenia napíšte aspoň stručné zdôvodnenie prečo váš výsledok skutočne dáva bázu a dimenziu týchto priestorov.)

$$S = [(1,2,2,1),(3,1,2,0),(0,1,1,1)]$$
$$T = [(1,1,1,1),(1,-1,0,2),(3,-1,1,3)]$$

B

Pre zadané podpriestory S, T priestoru $\mathbb{R}^4$ nájdite bázu a dimenziu priestorov $S+T$ a $S\cap T$. (Do riešenia napíšte aspoň stručné zdôvodnenie prečo váš výsledok skutočne dáva bázu a dimenziu týchto priestorov.)

$$S = [(1,2,2,1),(3,1,2,0),(0,1,1,1)]$$
$$T = [(1,1,1,1),(1,0,1,-1),(1,-1,3,-3)]$$

Skupina, ktorú riešite:
A: DBa, DBe, TDD, VF, VG, MKa, HK, KM, DMa, KS, MT, LV, AT, MZ, MŽ
B: SB, MF, KF, MKv, SAK, TK, NN, DMi, MPj, MPo, BR, BS, TŠ, RV, AV
(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)