

Zverejnená: 8. októbra 2021.

Termín na odovzdanie: cvičenia počas tretieho týždňa semestra, t.j. 15. októbra 2021.

Nech $(G, *)$ je grupa. Označme $\mathcal{P}(G) = \{A; A \subseteq G\}$ množinu všetkých podmnožín G . Pre ľubovoľné $A, B \subseteq G$ definujeme

$$A * B = \{a * b; a \in A, b \in B\}.$$

Tým sme zadefinovali binárnu operáciu¹ na množine $\mathcal{P}(G)$. Zistite, či dané tvrdenie platí – ak áno, tak ho dokážte; ak nie, tak nájdite kontrapríklad. (T.j. buď očakávam zdôvodnenie, že uvedené tvrdenie platí pre ľubovoľnú grupu $(G, *)$. Alebo nejaký konkrétny príklad grupy, pre ktorú uvedené tvrdenie neplatí – spolu so zdôvodnením, prečo je to tak.)²³

- (A) Existuje množina $A \in \mathcal{P}(G)$ taká, že $A * A = A$.
 - (B) Existuje množina $A \in \mathcal{P}(G)$ taká, že rovnosť $A * B = A$ platí pre všetky $B \in \mathcal{P}(G)$.
 - (C) Binárna operácia $*$ na množine $\mathcal{P}(G)$ má neutrálny prvok.
 - (D) Binárna operácia $*$ na množine $\mathcal{P}(G)$ je komutatívna.
-

Skupina, ktorú riešite:

A: KF, VF, HK, DMi, BS, MT, AT, AV

B: SB, MKa, TDD, TK, MPj, MPo, LV, MZ

C: MKv, SAK, DMa, KM, NN, KS, MŽ

D: DBa, DBe, MF, VG, BR, TŠ, RV,

(Ak ste sa v tomto zozname nenašli, tak ma kontaktujte.)

¹Fakt, že to je naozaj binárna operácia berte ako zadaný – toto nemusíte zdôvodňovať.

²Symbol $*$ tu používame v dvoch významoch - raz ako grupovú operáciu na množina G , raz ako označenie pre binárnu operáciu na $\mathcal{P}(G)$. Už ste asi na niečo takéto zvyknutí – videli ste viacero situácií, kedy sme rovnaký symbol použili pre rôzne veci. Samozrejme, ak sa vám tak bude pracovať lepšie, pokojne ich môžete označiť rôzne. V zadaní som použil rovnaké označenie, keďže je to v tejto situácii pomerne prirodzené a často sa to presne takto používa.

³Ak vám je zadanie úlohy nejasné, možno pomôže, ak si ho najprv vyskúšate rozmyslieť na príklade nejakej konkrétnej grupy. Napríklad si môžete zobrať grupu $(\mathbb{Z}, +)$ a skúsiť si pre niektoré podmnožiny $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ si rozmyslieť, čomu sa rovná $A * B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.