

## Determinanty

1. Vypočítajte determinanty:  $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$   $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$   $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant? Výsledky (bez záruky): 0,-8,8.

2. Vyriešte v  $\mathbb{Z}_5$  pomocou Cramerovho pravidla:  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix}$

3. Pomocou Cramerovho pravidla riešte:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 1 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 0 & & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

(Návod: Skúste zvoliť  $x_3, x_4$  za parametre.)

- 4\*. Majme regulárnu maticu  $A$  a sústavu tvaru  $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$ . Označme ako  $A_i$  maticu, ktorá vznikne ak v matici  $A$  nahradíme  $i$ -ty stĺpec pravými stranami.

a) Vedeli by ste vymyslieť vhodnú maticu tak aby platilo  $A \cdot B_i = A_i$ ?

b) Ak ste našli takú maticu, vedeli by ste pomocou nej odvodiť Cramerovo pravidlo?

5. Dokážte (pomocou definície determinantu): Nech  $A, B$  sú matice, ktoré majú ostatné riadky rovnaké a líšia sa iba v  $i$ -tom riadku. Nech  $C$  je matica, ktorej  $i$ -ty riadok je súčet  $i$ -teho riadku matice  $A$  a  $i$ -teho riadku matice  $B$ , a všetky ostatné riadky sú rovnaké ako v týchto dvoch maticiach.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{b}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i + \vec{b}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

Vedeli by ste tento výsledok aj interpretovať geometricky – pomocou objemu zodpovedajúceho rovnobežnostena? (Tento fakt spolu s tým, čo sa deje pri vynásobení konštantou, nám hovorí, že ak sa na determinant pozeráme ako na funkciu  $i$ -teho riadku, tak je to lineárne zobrazenie. Keďže to platí pre každý riadok, hovoríme tiež, že determinant je *multilineárne* zobrazenie.)

6. Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnotu pre niektoré hodnoty  $c \in \mathbb{R}$ ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Vypočítajte determinant

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Dá sa výsledok nejako geometricky interpretovať? (Hovorí tento determinant niečo o lineárnom zobrazení s danou maticou?)

8. Ak viete, že 195, 403 a 247 sú násobky čísla 13, viete ukázať (bez toho, aby ste ho museli vyrátať), že aj  $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$  je celočíselný násobok 13?

9. Ukážte, že ak  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , tak

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

10. Ukážte, že

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = -8$$

pre ľubovoľné  $x \in \mathbb{R}$ .

11. Vypočítajte determinant matice  $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$ . Použite súčin

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

na odvodenie identity  $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ . (Fibonacciho identita)

12. Vypočítajte

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & (n-1)x \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & nx \end{vmatrix}.$$

(Mali by ste dostať  $x^{n-2}(x-1)$ .)

13. Nech  $A$  je matica  $4 \times 4$ , ktorá obsahuje iba čísla  $\pm 1$ . Ukážte, že  $|A|$  je celočíselný násobok 8.

14. Ak  $A, B$  sú štvorcové matice a matica  $AB$  je regulárna, tak obe matice  $A, B$  sú regulárne. (Môžete sa zamyslieť nad tým, či to viete zdôvodniť s pomocou determinantov a aj nad riešením bez nich. Takisto sa môžete skúsiť zamyslieť nad tým, čo sa stane ak matice nie sú štvorcové.)

15. Nech  $A$  je matica rozmerov  $2 \times 3$  a  $B$  je matica rozmerov  $3 \times 2$ . Aké hodnoty môže nadobúdať  $\det(AB)$ ? Aké hodnoty môže nadobúdať  $\det(BA)$ ?

16. Permutáciu nazývame *párnou* ak má párny počet inverzií a *nepárnou* ak má nepárny počet inverzií. Vedeli by ste použitím determinantov ukázať, že počet párných a nepárných permutácií v  $S_n$  je rovnaký? (Hint: Možno vám pomôže determinant matice  $n \times n$  pozostávajúcej zo samých jednotiek.)

17. Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$ ? Viete nájsť všetky riešenia rovnice  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ ?

$$18. D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$$

$$19. D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$$

20. Vypočítajte determinant matice typu  $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné  $x$  a všetky prvky mimo diagonály sú rovné  $a$ .)

21. Nájdite všetky hodnoty  $x \in \mathbb{C}$  pre ktoré

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

22. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$$

(Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantami nejakých jednoduchších matíc – napríklad  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$  alebo  $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ .)

23. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D$$

Ukážte, že ak  $A$  a  $C$  komutujú, potom sa determinant rovná  $\det(AD - CB)$ .