Termín na odovzdanie: cvičenia v druhom týždni semestra; t.j. v piatok 25. februára 2022. (Ak by výuka aj v treťom týždni prebiehala dištančne, tak doplním zadanie aj do MS Teams, aby ste ho mohli odovzdať tam.)

Pre zadané matice nad poľom $\mathbb{R}$ vypočítajte $\det(A)$, $\det(B)$ a $\det(A \cdot B^{-1})$. (Uveďte aj výpočty, ktorými ste sa dostali k výsledku – a aspoň stručné zdôvodnenie, prečo to je naozaj správny výsledok.)

A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

B

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A: DBa, DBe, SB, MK, SAK, TK, BR, BS, TŠ, MŽ, , , , , ,
B: TDD, VF, VG, KM, MPj, MPo, AT, RV, AV, MZ, , , , ,

Termín na odovzdanie: najneskôr v piatok 4. marca 2022.

A

Nájdite aspoň štyri rôzne štvorice reálnych čísel (a, b, c, d), pre ktoré sa daný determinant rovná nule. (Uveďte aj zdôvodnenie, prečo je skutočne nulový.)

$$D(a,b,c,d) = \det \begin{pmatrix} a^2 & a(a+1) & (a+1)^2 & a^2+1 \\ b^2 & b(b+1) & (b+1)^2 & b^2+1 \\ c^2 & c(c+1) & (c+1)^2 & c^2+1 \\ d^2 & d(d+1) & (d+1)^2 & d^2+1 \end{pmatrix}$$

B

Nájdite aspoň štyri rôzne štvorice reálnych čísel (a, b, c, d), pre ktoré sa daný determinant rovná nule. (Uveďte aj zdôvodnenie, prečo je skutočne nulový.)

$$D(a,b,c,d) = \det \begin{pmatrix} a^2 & a(a+1) & (a+1)^2 & a^2-1 \\ b^2 & b(b+1) & (b+1)^2 & b^2-1 \\ c^2 & c(c+1) & (c+1)^2 & c^2-1 \\ d^2 & d(d+1) & (d+1)^2 & d^2-1 \end{pmatrix}$$

A: DBa, DBe, SB, MK, SAK, TK, MPj, BR, TŠ, MT, , , , , ,
B: TDD, VF, VG, KM, AT, MPo, BS, RV, AV, MZ, MŽ, , , , ,

Zverejnená 2. marcia 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v stredu 9. marca 2022.

A

Nájdite bázu a dimenziu priestoru $S^\perp$, kde S je zadaný podpriestor v $\mathbb{R}^4$ (so štandardným skalárnym súčinom). Nájdite aj nejakú ortogonálnu bázu priestoru S.

$$S = [(1,1,-1,3),(0,1,1,1),(1,-2,2,0)]$$

B

Nájdite bázu a dimenziu priestoru $S^\perp$, kde S je zadaný podpriestor v $\mathbb{R}^4$ (so štandardným skalárnym súčinom).

$$S = [(1,1,-1,3),(0,1,2,-1),(1,-2,2,-3)]$$

Nájdite aj nejakú ortogonálnu bázu priestoru S.

A: DBa, DBe, SB, MK, SAK, TK, MPj,MPo, TŠ, MT, MZ, , , , ,
B: TDD, VF, VG, KM, BR, BS, AT, RV, AV, MŽ, , , , ,

Zverejnená 9. marca 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v stredu 16. marca 2022.

Pre daný podpriestor S v $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom:
a) Nájdite maticu P ortogonálnej projekcie na S.
b) Nájdite maticu Q ortogonálnej projekcie na $S^\perp$.
c) Čomu sa rovná matica $(P-Q)^2$?

A

$$S = [(1,2,-1,3),(0,1,-1,2),(3,1,2,-1)]$$

B

$$S = [(1,2,-1,3),(0,1,-1,1),(2,-1,3,1)]$$

A: DBa, TDD, MK, TK, KM, MPo, BR, TŠ, AT, MT, , , , ,
B: DBe, SB, VF, VG, SAK, MPj, BS, RV, AV, MZ, MŽ, , , ,

Zverejnená 17. marca 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v piatok 25. marca 2022.

A

V afinnom priestore $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ máme dané body A_0, A_1, A_2, A_3 a B_0, B_1, B_2, B_3 Nájdite predpis afinného zobrazenie $(f, \varphi)\colon (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ takého, že $f(A_i) = B_i$ pre $i = 0, 1, 2, 3$. Je toto zobrazenie určené jednoznačne? Je to afinný izomorfizmus?

$$A_0 = (1, 0, 2) \qquad B_0 = (0, 1, 1)$$
$$A_1 = (1, -2, 0) \qquad B_1 = (2, 1, 3)$$
$$A_2 = (2, -1, 3) \qquad B_1 = (2, -1, 1)$$
$$A_3 = (1, 1, 1) \qquad B_1 = (1, 2, 3)$$

B

V afinnom priestore $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ máme dané body A_0, A_1, A_2, A_3 a B_0, B_1, B_2, B_3 Nájdite predpis afinného zobrazenie $(f, \varphi)\colon (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ takého, že $f(A_i) = B_i$ pre $i = 0, 1, 2, 3$. Je toto zobrazenie určené jednoznačne? Je to afinný izomorfizmus?

$$A_0 = (1, 1, -2) \qquad B_0 = (1, 1, 2)$$
$$A_1 = (2, 1, -1) \qquad B_1 = (2, 1, 3)$$
$$A_2 = (3, 2, -1) \qquad B_1 = (1, -1, 0)$$
$$A_3 = (3, 1, 1) \qquad B_1 = (1, 2, 3)$$

A: DBa, DBe, SB, VF, MK, TK, BR, BS, TŠ, AV, MT, , , , ,
B: TDD, VG, SAK, KM, MPj, AT, MPo, RV, MZ, MŽ, , , , ,

Zverejnená 23. marca 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v stredu 30. marca 2022.

A

Nech (A_0, A_1, A_2, A_3) tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu v $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ a body $(B_0, \dots, B_3)$ sú zadané ako ich barycentrické kombinácie:

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 \\ B_1 &= 2A_1 - A_0 \\ B_2 &= 2A_2 - A_0 \\ B_3 &= 2A_3 - A_0 \end{aligned}$$

Dokážte, že aj (B_0, B_1, B_2, B_3) tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu.

Ak bod X je vyjadrený v tvare barycentrickej kombinácie ako

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3,$$

aké bude jeho vyjadrenie ako barycentrickej kombinácie bodov $B_0, \dots, B_3$?

B

Nech (A_0, A_1, A_2, A_3) tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu v $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ a body $(B_0, \dots, B_3)$ sú zadané ako ich barycentrické kombinácie:

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 \\ B_1 &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1 \\ B_2 &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_2 \\ B_3 &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_3 \end{aligned}$$

Dokážte, že aj (B_0, B_1, B_2, B_3) tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu.

Ak bod X je vyjadrený v tvare barycentrickej kombinácie ako

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3,$$

aké bude jeho vyjadrenie ako barycentrickej kombinácie bodov $B_0, \dots, B_3$?

A: DBa, DBe, SB, MK, TK, MPj, BR, TŠ, AV, MZ, MT, , , , ,
B: TDD, VG, VF, SAK, KM, AT, MPo, BS, RV, MŽ, , , , ,

Zverejnená 30. marca 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v stredu 6. apríla 2022.

Pre dané afinné podpriestory α, β v $\mathbb{R}^4$ nájdite ich prienik – vyjadrite ho parametricky i všeobecne. Zistite, či sú rovnobežné, rôznobežné, mimobežné (alebo či nenastane ani jedna z týchto možností).

Môžete sa zamyslieť aj nad tým, či niektoré z uvedených možností viete vylúčiť už z toho, že $\dim(V_\alpha) = 2$, $\dim(V_\beta) = 3$ a pracujeme v štvorrozmernom priestore – t.j. bez toho, aby ste naozaj aj počítali prienik. (Ale ako odpoveď úplne postačí aj ak vzájomnú polohu zistíte na základe výpočtov, ktoré urobíte.)

A

$$\alpha \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_3 - 2x_4 = 1\}$$

$$\beta \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + s \qquad + 2u \\ x_2 = 3 \qquad + t + u \\ x_3 = 2 - s + t - 3u \\ x_4 = \quad - s \qquad + 2u, \qquad s, t, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

B

$$\alpha \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2\}$$

$$\beta \equiv \begin{cases} x_1 = 2 + s \qquad + 4u \\ x_2 = 1 \qquad + t + u \\ x_3 = 1 - s + t - u \\ x_4 = \qquad\qquad t - u, \qquad s, t, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A: DBa, DBe, SB, MK, TK, SAK, MPj, TŠ, MZ, MT, , , , ,
B: TDD, VF, VG, KM, AT, MPo, BR, BS, RV, AV, MŽ, , „

Zverejnená 6. apríla 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v stredu 13. apríla 2022.

Nájdite vzdialenosť roviny α a priamky p v priestore $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$.

A

$$\alpha \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4); 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 3\}$$

$$p \equiv \begin{cases} x_1 = -1 + 3t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = -t \\ x_4 = -2 - t \end{cases}$$

B

$$\alpha \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 + x_3 + x_4 = 2, 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 1\}$$

$$p \equiv \begin{cases} x_1 = -1 + t \\ x_2 = -t \\ x_3 = -1 + t \\ x_4 = -2 - t \end{cases}$$

A: DBa, DBe, SB, MK, TK, SAK, MPj, TŠ, MZ, MT, , , , ,
B: TDD, VF, VG, KM, AT, MPo, BR, BS, RV, AV, MŽ, , „

Zverejnená 13. apríla 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v stredu 20. apríla 2022.

A

Metódou najmenších štvorcov nájdite približné riešenie systému $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zverejnená 20. apríla 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v stredu 4. mája 2022. (Budúcu stredu, t.j. 27. apríla, je dekanské voľno.)

A

Pre danú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a regulárnu maticu P tak, že platí $PAP^{-1} = D$. (Alebo zdôvodnite, že také matice neexistujú.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zverejnená 3. mája 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v piatok 20. mája 2022. (Koniec prvého týždňa skúškového obdobia.)

A

Pre danú maticu A nájdite jej Jordanov tvar J.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(Explicitne napíšem, že nie je nutné hľadať maticu P takú, že $PAP^{-1} = J$, ako odpoveď mi stačí matica J a zdôvodnenie, prečo vyšla takáto matica – ako aj výpočty, pomocou ktorých ste sa k nej dostali.)

Zverejnená 3. mája 2022. Termín na odovzdanie: najneskôr v piatok 20. mája 2022. (Koniec prvého týždňa skúškového obdobia.)

A

Zistite všetky možnosti pre Jordanov tvar, ak o matici A viete, že:

- Jej charakteristický polynóm je $\chi_A(x) = (x-1)^4$,
- $h(A-I) = 2$,
- $A^3 - 2A^2 + A = 0$.