Množiny a operácie s nimi

9. februára 2022

Teória množín

Hlavný cieľ tejto prednášky:

- Pojem veľkosti (kardinality) pre nekonečné množiny.
- Aritmetika s kardinálnymi číslami.
- Aplikácie kardinálnych čísel.

Predtým potrebujeme vedieť niečo o množinách a zobrazeniach.

Georg Cantor

Georg Cantor - zakladateľ teórie množín
1874 - dôkaz o existencii transcendentných čísel
Nepoužíval axiomatický prístup – tzv. naivná teória množín.
Množina = súhrn objektov určených nejakou vlastnosťou.

Russellov paradox

Spomedzi všetkých množín vyberieme tie množiny, ktoré nie sú prvkom samej seba.

$$A = \{x; x \notin x\}$$

Ak $A \in A$, tak $A \notin A$ – spor.
Ak $A \notin A$, tak $A \in A$ – spor.

Axiomatická teória množín

Riešenie paradoxov:

- Axiomatická teória množín (neskôr).
- Pracovať iba s jednoduchými množinami, ako $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ a množinami, ktoré z nich vieme dostať základnými operáciami.

Príklady množín

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N}; (\exists a, b \in \mathbb{N}) a^2 + b^2 = x\}$$
$$C = \{2x; x \in \mathbb{N}\}$$

Z nich môžeme tvoriť ďalšie množiny.

Logické spojky

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tautológie

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Tautológie

$$\neg(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1

Obmena implikácie

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Výroky s kvantifikátormi

Definícia

Výrok $(\forall x)P(x)$ znamená, že pre každý objekt x platí výrok $P(x)$. Symbol $\forall$ nazývame *všeobecný kvantifikátor.*

Výrok $(\exists x)P(x)$ znamená, že existuje taký objekt x, pre ktorý platí výrok $P(x)$. Symbol $\exists$ nazývame *existenčný kvantifikátor.*

Výroky s kvantifikátormi

$$(\forall x \in A)P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x))$$
$$(\exists x \in A)P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists x)(x \in A \wedge P(x))$$

Výroky s kvantifikátormi

$$\neg[(\forall x)P(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x).$$

Definície

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Leftrightarrow z \in B)$$

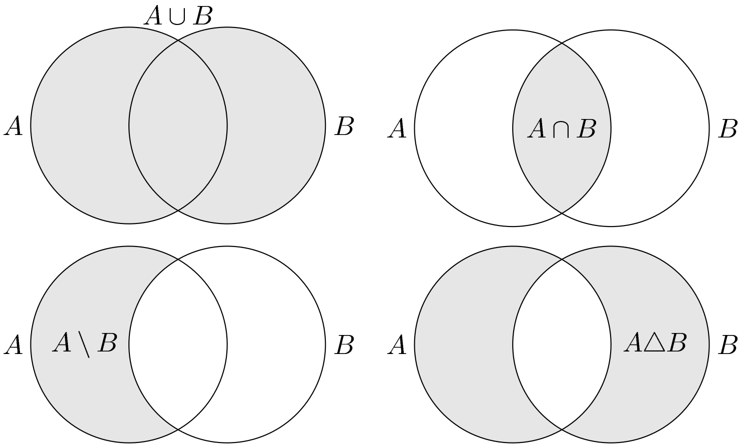
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Vennove diagramy



Inklúzia

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Vlastná podmnožina:

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

Potenčná množina:

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

Vlastnosti inklúzie

Tvrdenie

Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

- *Pre každú množinu platí $A \subseteq A$.*
- *$A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.*
- *Ak platí $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$.*

Identity pre ∪ a ∩

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

i. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asociatívnosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$);

ii. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (*komutatívnosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$);

iii. $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$;

iv. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributívnosť*);

v. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (*idempotentosť operácií* $\cup$ *a* $\cap$)

vi. $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (*zákony absorpcie*).

Zjednotenie a prienik systému množín

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\exists A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{z; (\exists i \in I) z \in A_i\}$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{z; (\forall i \in I) z \in A_i\}$$

$\bigcap \mathcal{S}$ definujeme len pre $\mathcal{S} \neq \emptyset$

Zjednotenie a prienik systému množín

Tvrdenie

Nech $\mathcal{S}$ a B sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

$$B \cap \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} (B \cap A);$$

$$B \cup \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} (B \cup A).$$

Inklúzia, prienik a zjednotenie

Tvrdenie

Nech A a B sú množiny. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

i. $A \subseteq B$;
ii. $A = A \cap B$;
iii. $B = A \cup B$.

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

i. $\emptyset \subseteq A$;
ii. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
iii. *Ak* $A \subseteq B$, *tak* $A \cap C \subseteq B \cap C$ *a* $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Identity pre množinový rozdiel

i. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

ii. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

iii. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

iv. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

v. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

vi. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B)$;

vii. $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$;

Identity pre množinový rozdiel

viii. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$;
ix. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.
x. $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I}(A \setminus B_i)$, $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(A \setminus B_i)$.
xi. Ak $B \subseteq C$, tak $A \setminus C \subseteq A \setminus B$.
xii. Ak $B \subseteq C$, tak $B \setminus A \subseteq C \setminus A$.

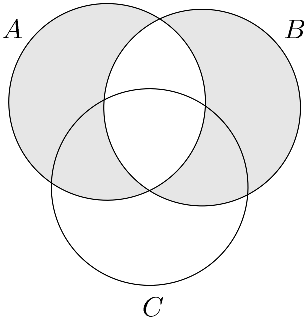
Identity pre symetrickú diferenciu

Tvrdenie

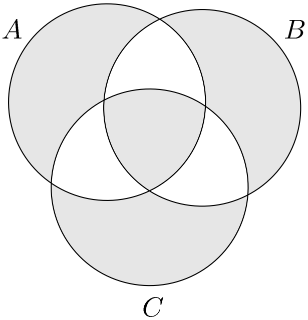
Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

i. $A \triangle B = B \triangle A$;
ii. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
iii. $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle \emptyset = A$;
iv. $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$;
v. $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

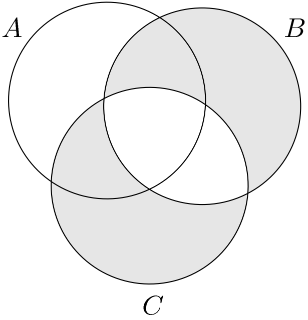
Asociatívnosť symetrickej diferencie



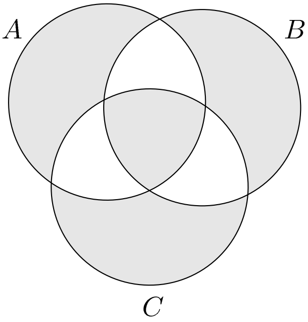
Asociatívnosť symetrickej diferencie



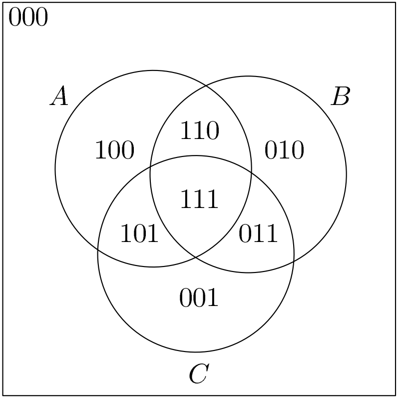
Asociatívnosť symetrickej diferencie



Asociatívnosť symetrickej diferencie



Porovnanie s tabuľkou pravdivostných hodnôt



Usporiadaná dvojica

$$(a, b) = (c, d) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c \wedge b = d$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Karteziánsky súčin množín A a B je množina, ktorej prvkami sú práve také usporiadané dvojice, kde prvý prvok patrí do množiny a a druhý prvok patrí do množiny b. Túto množinu označujeme

$$A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Karteziánsky súčin

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí

i. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
ii. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
iii. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
iv. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
v. *Ak navyše* $A, B, C, D \neq \emptyset$, *tak platí*
$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$