

Axióma výberu

9. februára 2022

Axióma výberu

Axióma VIII (Axióma výberu)

$$\begin{aligned}
 (\forall S)[(\forall A \in S)(A \neq \emptyset) \wedge (\forall A \in S)(\forall B \in S)(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \\
 \Rightarrow (\exists V)(\forall A \in S)(\exists x)(V \cap A = \{x\})]
 \end{aligned}$$

Pre každý systém neprázdnych po dvoch disjunktných množín existuje výberová množina, t.j. taká množina, ktorá má s každou z množín tohoto systému jednoprvkový prienik.

Surjekcie a injekcie

Tvrdenie

Ak $f: A \rightarrow B$ je surjekcia, tak existuje $g: B \rightarrow A$ také, že $f \circ g = id_B$.

- ▶ Toto tvrdenie je (v ZF) ekvivalentné s axiómou výberu.
- ▶ Analogické tvrdenie pre injekcie: Ak $g: B \rightarrow A$ je injekcia, tak existuje $f: A \rightarrow B$ také, že $f \circ g = id_B$.

Dôsledok

Existuje surjekcia $A \rightarrow B \Leftrightarrow$ existuje injekcia $B \rightarrow A$.

Dostávame takto popis vzťahu $|A| \leq |B|$ pre kardinality pomocou surjektívny zobrazení.

Cauchyho a Heineho definícia spojitosti

Definícia (Cauchyho definícia spojitosti)

Funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá* v bode $a \in \mathbb{R}$, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definícia (Heineho definícia spojitosti)

Funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *sekvenciálne spojitá* v bode $a \in \mathbb{R}$, ak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Tvrdenie

Nech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia a $a \in \mathbb{R}$. Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď je sekvenciálne spojitá v bode a .

Cauchyho a Heineho definícia spojitosti

- ▶ Ak by sme sa zaoberali spojitosťou funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na celom \mathbb{R} , tak ekvivalencia Cauchyho a Heineho definície platí už v ZF.
- ▶ Z platnosti ekvivalencie týchto dvoch definícií spojitosti pre reálne funkcie v bode už vyplýva platnosť axiómy výberu pre spočítateľné systémy podmnožín \mathbb{R} .

Definícia miery

Definícia

Množina $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva σ -algebra na množine X , ak platí

- i. $X \in \mathcal{S}$;
- ii. $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$; (množina \mathcal{S} je uzavretá vzhľadom na vytváranie doplnkov)
- iii. $A_n \in \mathcal{S}$ pre $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$; (množina \mathcal{S} je uzavretá vzhľadom na spočítateľné zjednotenia).

Definícia miery

Definícia

Ak \mathcal{S} je nejaká σ -algebra na X , tak funkcia $m: \mathcal{S} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ z \mathcal{S} ak platí

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$$

pre každý spočítateľný systém $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ disjunktných množín z \mathcal{S} .

Prvky σ -algebry \mathcal{S} sa zvyknú nazývať *merateľné množiny*.

Stručne: že miera je funkcia zo σ -algebry do \mathbb{R} , ktorá je nezáporná a σ -aditívna.

Miera je *monotónna*:

$$A \subseteq B \wedge A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow m(A) \leq m(B)$$

Definícia miery

Miera je *monotónna*:

$$A \subseteq B \wedge A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow m(A) \leq m(B)$$

Definícia

Miera $m: \mathcal{S} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ na množine \mathbb{R} sa nazýva *invariantná na posun* alebo *translačne invariantná*, ak pre každú množinu $A \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathbb{R}$ aj množina

$$x + A = \{x + a; a \in A\}$$

patrí do \mathcal{S} a platí

$$m(x + A) = m(A).$$

Inak povedané, miera množiny sa nezmení ak ju posunieme.

Lebesguova miera

Lebesguova miera:

- ▶ je translačne invariantná;
- ▶ miera intervalu je jeho dĺžka;
- ▶ miera konečnej množiny je nulová.

Vitaliho konštrukcia

Tvrdenie

Neexistuje translačne invariantná miera $m: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ taká, že $m(\langle a, b \rangle) = b - a$ pre ľubovoľné $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Rozklad $(\mathbb{R}, +)$ podľa \mathbb{Q} má triedy

$$a + \mathbb{Q} = \{a + q; q \in \mathbb{Q}\}$$

pre $a \in \mathbb{R}$.

$V =$ výberová množina pre $\{(a + \mathbb{Q}) \cap \langle 0, 1 \rangle; a \in \mathbb{R}\}$

$$\langle 0, 1 \rangle \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1, 1 \rangle} q + V \subseteq \langle -1, 2 \rangle,$$

Vitaliho konštrukcia

Označme $B := \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1, 1 \rangle} q + V$.

$$m(B) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1, 1 \rangle} m(q + V) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1, 1 \rangle} m(V).$$

Teda $m(B) \in \{0, \infty\}$

$$1 = m(\langle 0, 1 \rangle) \leq m(B) \leq m(\langle -1, 2 \rangle) = 3$$

Spor

Vitaliho konštrukcia

Dôsledok

Existuje lebesguovsky nemeateľná podmnožina \mathbb{R} .

Banach-Tarskiho paradox

Veta (Banach-Tarski)

Pre ľubovoľné dve ohraničené množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ existujú rozklady $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ a $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ na konečný počet množín také, že A_i a B_i sú kongruentné (t.j. jednu z druhej možno získať posunutím a otočením).

Aplikácie axiómy výberu

Axióma výberu alebo jej ekvivalentné podoby (Zornova lema, princíp dobrého usporiadania) sa dajú použiť na dôkaz:

- ▶ Porovnateľnosť kardinálnych čísel
- ▶ $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$ pre kardinály $a, b \geq \aleph_0$
- ▶ Existencia bázy v ľubovoľných (aj nekonečnorozmerných) vektorových priestoroch.
- ▶ ...

Hamelova báza

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F .

Podmnožinu $A \subseteq V$ nazývame *lineárne nezávislou* podmnožinou, ak pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_n \in F$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in A$ platí

$$c_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dots = c_n = 0.$$

Hovoríme, že podmnožina $A \subseteq V$ *generuje* priestor V , ak každý vektor z A sa je lineárna kombinácia (konečného počtu) vektorov z A . Označujeme $[A] = V$.

$(\forall \vec{\alpha} \in V) (\exists n \in \mathbb{N}) (\exists c_1, \dots, c_n \in F)$ a $(\exists \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in A)$

$$\vec{\alpha} = c_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + c_n \vec{\alpha}_n.$$

Hamelova báza

Definícia

Podmnožina A sa nazýva *Hamelova báza* priestoru V , ak je lineárne nezávislá a $[A] = V$.

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a A je lineárne nezávislá podmnožina V . Potom existuje Hamelova báza B taká, že $A \subseteq B$.

Tvrdenie

Nech V je vektorový priestor nad poľom F . Nech $B_{1,2}$ sú Hamelove bázy priestoru V . Potom $|B_1| = |B_2|$.

Cauchyho funkcionálna rovnica

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (1)$$

Lema

Ak f je riešenie funkcionálnej rovnice (1), tak

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{R}) f(rx) = rf(x) \quad (2)$$

Tvrdenie

Ak f je spojité riešenie funkcionálnej rovnice (1), tak $f(x) = ax$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$.

Cauchyho funkcionálna rovnica

Tvrdenie

Ak f je riešenie funkcionálnej rovnice (1) a f je spojité v nejakom bode $x_0 \in \mathbb{R}$, tak f je spojité na celom \mathbb{R} , a teda f má tvar $f(x) = ax$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$.

Tvrdenie

Ak funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vyhovuje rovnici (1) a je ohraničená na nejakom netriviálnom intervale I , tak $f(x) = ax$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$.

Tvrdenie

Ak f je monotónne riešenie funkcionálnej rovnice (1), tak $f(x) = ax$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$.

Cauchyho funkcionálna rovnica

S využitím Hamelovej bázy vieme dokázať i existenciu riešení, ktoré nie sú lineárne.

Veta (AC)

Existujú nelineárne riešenia rovnice (1) (t.j. riešenia, ktoré nie sú tvaru $f(x) = ax$).

Cauchyho funkcionálna rovnica

Nespojité riešenie (1) má hustý graf.

Tvrdenie

Ak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je nespojité riešenie (1), tak graf tejto funkcie

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$$

je hustá podmnožina \mathbb{R}^2 .