Domáca úloha č. 13

Zverejnená 4.4.2022 - odovzdáva sa najneskôr 25.4.2022. (Do prednášky – ak bude záujem, po nej sa môžeme porozprávať o riešeniach.)
Táto d.ú. je za 6 bodov.

Dané množiny usporiadajte podľa kardinality. Svoje tvrdenia zdôvodnite! (T.j. očakáva sa napríklad odpoveď v tvare napríklad $|A| < |C| = |D| < |B|$ a zdôvodnenie všetkých uvedených nerovností a rovností.)

(a) $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, $D =$množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $C = \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, $D =$množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(c) $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$, $B = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $D =$množina všetkých spojitých zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Poznámka: Môžu sa používať všetky nerovnosti a rovnosti, o ktorých sme dokázali, že platia pre všetky kardinály (alebo dôkaz je v texte k prednáške a z nejakého dôvodu sme ho preskočili) a tiež platnosť rovností $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ a $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. (Inak povedané: Tie veci čo sú v prehľade v `priklady.pdf` s výnimkou rovnosti $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$, ktorej platnosť pre nekonečné kardinály sme iba spomenuli bez dôkazu.) Takisto môžete používať známe kardinality číselných množín: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ a $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}$.

Ak budete pri výpočtoch potrebovať nejaké ďalšie pomocné výsledky o kardináloch, treba uviesť aj ich dôkaz.

Výsledok by mal byť upravený na niektoré z kardinálnych čísel $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.

a: TB, MK, JK, JP, , , , , ,
b: MF, VF, LP, ZŠ, LVr, , , , ,
c: RO, AK, JS, AS, LVa, , , , ,