

Faktorové zobrazenia

20. októbra 2020

Relácie ekvivalencie a surjektívne zobrazenia

- ▶ Surjekcia $f: X \rightarrow Y$ dáva reláciu ekvivalencie

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

triedy sú $f^{-1}(y)$.

- ▶ Ak \sim je relácia ekvivalencie, tak pre faktorovú množinu $X/\sim = \{[x]; x \in X\}$ dostaneme surjekciu

$$p: X \rightarrow X/\sim$$

$$p: x \mapsto [x]$$

- ▶ Teda každú reláciu ekvivalencie viem určiť surjektívnym zobrazením a obrátene, každá relácia ekvivalencie mi dáva isté kanonické surjektívne zobrazenie.

Topológia z relácie ekvivalencie

Tvrdenie

Nech (X, \mathcal{T}) je topologický priestor a \sim je relácia na množine X .
 Označme $p: X \rightarrow X/\sim$ zobrazenie definované ako $p(x) = [x]$. Ak
 položíme

$$\mathcal{T}_{\sim} = \{V \subseteq X/\sim; p^{-1}[V] \in \mathcal{T}\},$$

tak \mathcal{T}_{\sim} je topológia na množine X/\sim .

Topologický priestor $(X/\sim, \mathcal{T}_{\sim})$ budeme nazývať faktorový priestor
 priestoru X podľa relácie \sim .

$p: X \rightarrow X/\sim$ je surjekcia a platí:

$$V \in \mathcal{T}_{\sim} \quad \Leftrightarrow \quad p^{-1}[V] \in \mathcal{T}.$$

Topológia z relácie ekvivalencie

Tvrdenie

Nech (X, \mathcal{T}) je topologický priestor a $f: X \rightarrow Y$ je surjektívne zobrazenie. Systém

$$\mathcal{T}' = \{V \subseteq Y; f^{-1}[V] \in \mathcal{T}\}$$

tvorí topológiu na množine Y .

Definícia faktorového zobrazenia

Definícia

Nech (X, \mathcal{T}_X) a (Y, \mathcal{T}_Y) sú topologické priestory a $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zobrazenie. Zobrazenie f je *faktorové zobrazenie* ak f je surjektívne a platí

$$V \in \mathcal{T}_Y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X. \quad (1)$$

Tiež v takomto prípade povieme, že Y je *faktorový priestor* priestoru X .

Kružnica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

- ▶ $f: I \rightarrow S, f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
- ▶ $g: \mathbb{R} \rightarrow S, g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

Valec

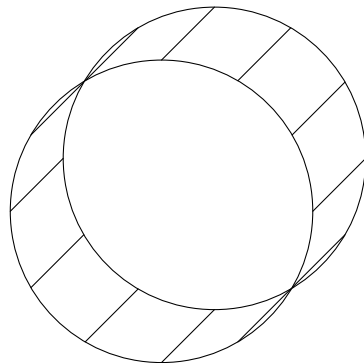
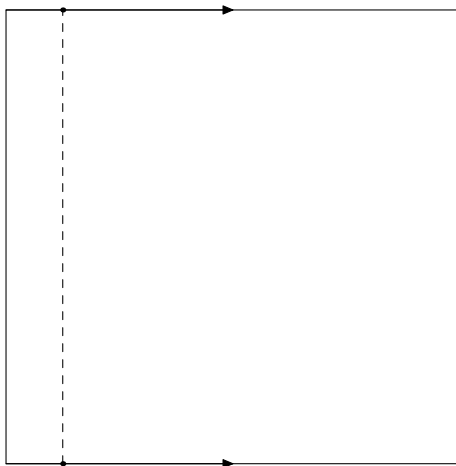
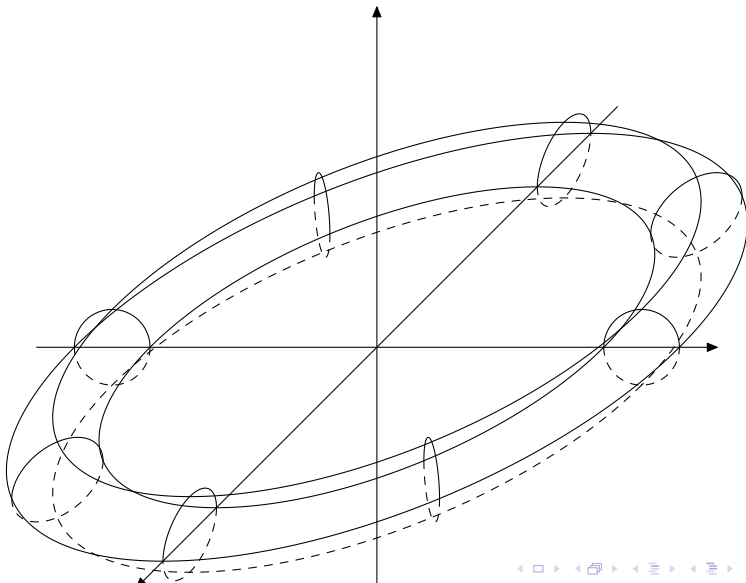


Figure: Valec ako faktorový priestor štvorca.

Tórus



Valec

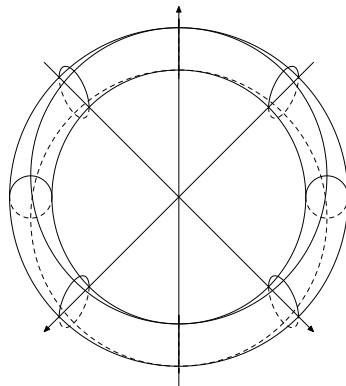
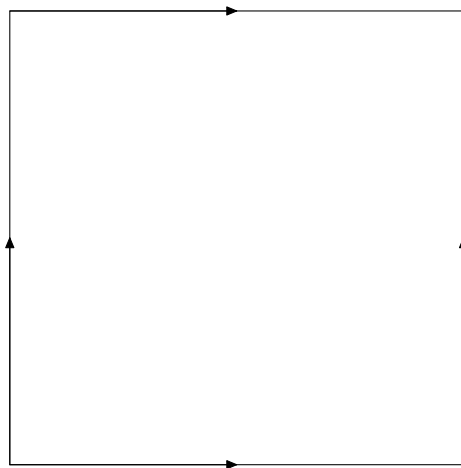


Figure: Tórus ako faktorový priestor štvorca.

Möbiov pásik

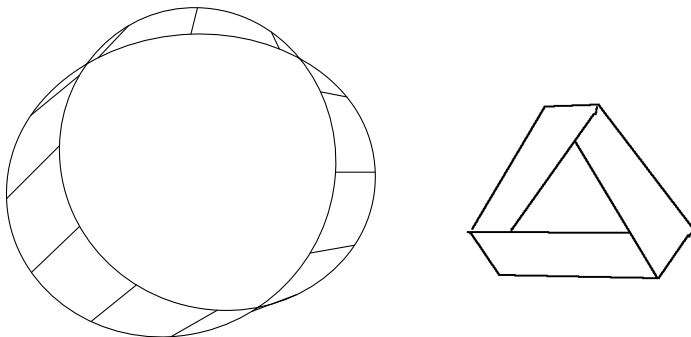


Figure: Möbiov pásik.

Möbiov pásik

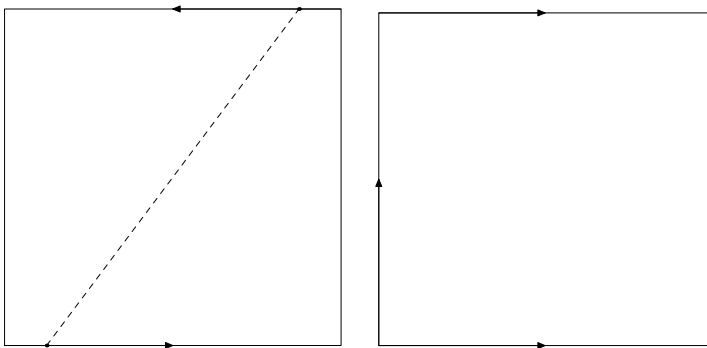


Figure: Möbiov pásik a Kleinovu fľašu dostaneme zo štvorca

Faktorové zobrazenia a spojitosť

Tvrdenie

Nech $q: X \rightarrow Y$ je faktorové zobrazenie. Nech Z je topologický priestor a $f: Y \rightarrow Z$ je zobrazenie. Potom zobrazenie f je spojité práve vtedy, keď zloženie $f \circ q$ je spojité.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow f \circ q & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

$$f \circ q^{-1}[V] = q^{-1}[f^{-1}[V]]$$

Vzor uzavretej množiny

Tvrdenie

Nech $f: X \rightarrow Y$ je surjektívne zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom f je faktorové zobrazenie práve vtedy, keď pre ľubovoľné $C \subseteq Y$ platí: Množina $f^{-1}[C]$ je uzavretá v X práve vtedy, keď množina C je uzavretá v Y .

$$f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A]$$

Zloženie faktorových zobrazení

Tvrdenie

Ak $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ sú faktorové zobrazenia, tak aj ich zloženie $g \circ f: X \rightarrow Z$ je faktorové.

$$V \in \mathcal{T}_Z \Leftrightarrow g^{-1}[V] \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}[V] = f^{-1}[g^{-1}[V]] \in \mathcal{T}_X$$

Otvorené a uzavreté surjekcie

Tvrdenie

Ak $f: X \rightarrow Y$ je surjektívne, spojité a otvorené zobrazenie, tak f je faktorové zobrazenie.

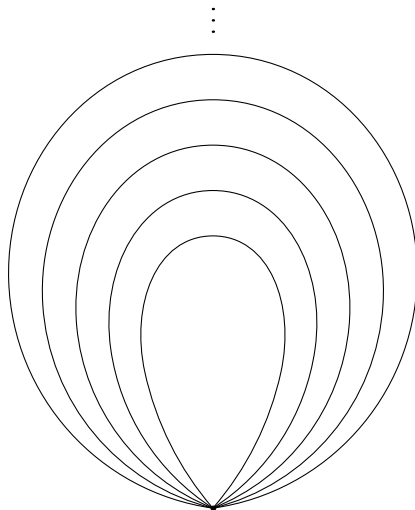
Ak $f: X \rightarrow Y$ je surjektívne, spojité a uzavreté zobrazenie, tak f je faktorové zobrazenie.

$$f[f^{-1}[A]] = A$$

Priestor \mathbb{R}/\mathbb{Z} X/A

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = y) \vee (x, y \in A)$$

\mathbb{R}/\mathbb{Z} = stotožnil som všetky celé čísla do jedného bodu

Priestor \mathbb{R}/\mathbb{Z} Figure: Faktorový priestor \mathbb{R}/\mathbb{Z}

Priestor \mathbb{R}/\mathbb{Z}

$$Y = \{\infty\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\}$$

$$q(x) = \begin{cases} \infty & \text{ak } x \in \mathbb{Z}, \\ x & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- ▶ separabilný
- ▶ ∞ nemá spočítateľnú bázu okolí