Podobnosť matíc

Matice $A, B \in M_{n,n}(F)$ sú *podobné,* ak existuje regulárna matica P taká, že $B = PAP^{-1}$.

1. Ukážte, že podobnosť matíc (chápaná ako relácia na $M_{n,n}(F)$) je relácia ekvivalencie.
2. Pre $\vec{\alpha}_1 = (2,1)$, $\vec{\alpha}_2 = (1,2)$, $\vec{\beta}_1 = (-1,1)$, $\vec{\beta}_2 = (2,3)$, $\vec{\gamma}_1 = (1,1)$, $\vec{\gamma}_2 = (3,1)$. Nájdite:
   a) Maticu P_1 prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ k báze $\vec{\beta}_1$, $\vec{\beta}_2$.
   b) Maticu P_2 prechodu od bázy $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ k báze $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$.
   c) Maticu P_3 prechodu od bázy $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ k báze $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$.
   d) Aký je vzťah medzi maticami P_1, P_2 a P_3?
3. Nájdite všetky matice, ktoré sú podobné s nulovou maticou.
4. Nech $A = cI$. Aké matice sú podobné s maticou A?
5. Nájdite všetky matice A také, že jediná matica, ktorá je podobná s A, je práve matica A. (Inak povedané, trieda ekvivalencie matice A je jednoprvková.)
6. Dokážte, že ak A a B sú podobné, tak sú podobné aj matice $A - cI$ a $B - cI$ (pre ľubovoľné $c \in F$).
7. Ak aspoň jedna zo štvorcových matíc A, B stupňa n je regulárna, tak AB a BA sú podobné. Platí to aj za predpokladu, že nie sú regulárne?
8. Ukážte, že ak matica A je podobná matici B, tak aj matice A^{-1} a B^{-1} sú podobné.
9. Ukážte, že ak matica A je podobná matici B, tak aj matice A^n a B^n sú podobné pre každé $n \in \mathbb{N}$.
10. Ukážte, že ak A a B sú podobné, tak majú rovnakú hodnosť, determinant a stopu.
11. [P, 1051] Nech φ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi(1)} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

    sú podobné.
12. Nech $P = \|p_{ij}\|$ je regulárna matica typu $n \times n$ a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ je báza vektorového priestoru V. Potom aj vektory $\vec{\alpha}'_1, \ldots, \vec{\alpha}'_n$ určené vzťahmi

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}'_1 &= p_{11}\vec{\alpha}_1 + p_{12}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{1n}\vec{\alpha}_n \\ \vec{\alpha}'_2 &= p_{21}\vec{\alpha}_1 + p_{22}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{2n}\vec{\alpha}_n \\ &\vdots \\ \vec{\alpha}'_n &= p_{n1}\vec{\alpha}_1 + p_{n2}\vec{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\vec{\alpha}_n \end{aligned}$$

    tvoria bázu priestoru V.
13. Pre vektory $\vec{\gamma}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, označme ako $\vec{x}_i$ súradnice vektora v báze $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ a $\vec{x}'_i$ súradnice toho istého v báze $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \vec{\alpha}'_3$. Nájdite matice prechodu od $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ k $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \vec{\alpha}'_3$ ak viete, že $\vec{x}_1 = (1,2,1)$, $\vec{x}'_1 = (-1,1,1)$, $\vec{x}_2 = (-1,0,3)$, $\vec{x}'_2 = (1,-1,1)$, $\vec{x}_3 = (3,1,2)$ a $\vec{x}'_3 = (2,1,-2)$. (Návod: Bude to matica istého lineárneho zobrazenia.)

Literatúra

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.