Ortogonálna podobnosť

Veta o hlavných osiach: Ľubovoľná reálna symetrická matica je ortogonálne podobná s diagonálnou maticou. (T.j. existujú ortogonálna matica P a diagonálna matica D, také, že $PAP^{-1} = PAP^T = D$.)

Ortogonálna matica je taká reálna matica, pre ktorú platí $P^{-1} = P^T$, t.j. $PP^T = P^T P = I$. Ekvivalentná podmienka: Riadky (stĺpce) tvoria ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^n$.

Pre symetrickú reálnu maticu platí, že vlastné vektory zodpovedajúce *rôznym* vlastným hodnotám sú na seba kolmé.

1. Ukážte, že ak $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sú ortogonálne matice, tak aj AB a A^{-1} sú ortogonálne. (Z toho vidíme aj to, že množina všetkých ortogonálnych matíc rozmerov $n \times n$ s operáciou násobenia matíc tvorí grupu. Táto grupa sa zvykne nazývať *ortogonálna grupa* a označovať $O(n)$.)
2. Ukážte, že ortogonálna podobnosť je relácia ekvivalencie na množine $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
3. Ukážte, že ak A je symetrická matica a B je ortogonálne podobná s A, tak aj B je symetrická.
4. Ukážte, že ľubovoľná ortogonálna matica rozmerov 2×2 má tvar
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{alebo} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$
pre nejaké $\varphi \in \mathbb{R}$.
5. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$$
(Zápisy použité v tomto zadaní treba chápať ako zápisy blokových matíc, t.j. A je nejaká matica typu $m \times m$, B je typu $k \times k$ a C má rozmery $m \times k$. Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantmi nejakých jednoduchších matíc – napríklad $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ alebo $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Hint 2: Môže byť užitočný súčin blokových matíc. Hint 3: Možno sa oplatí skúsiť nejako použiť Laplaceov rozvoj.) [1]
6. Nájdite (ak taká matica existuje) ortogonálnu maticu P takú, že $PAP^T = D$ je diagonálna matica.
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
   e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
   f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
   g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
   h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

[1] Táto úloha nesúvisí s témou, ktorú preberáme – ale vedieť takýto fakt o determinantoch sa občas môže hodiť pri výpočte charakteristického polynómu.

j) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

k) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

Riešenia: a) $D = \mathrm{diag}(0, 0, 3)$, b) $D = \mathrm{diag}(-1, -4, 6)$, c) $D = \mathrm{diag}(-3, 1, 4)$, d) $D = \mathrm{diag}(-5, 1, 7)$, e) $D = \mathrm{diag}(-5, -3, 1, 3)$, f) $D = \mathrm{diag}(-1, -1, 1, 5)$, g) $D = \mathrm{diag}(1, 3, 7)$, h) $D = \mathrm{diag}(-3, -1, 3)$, i) $D = \mathrm{diag}(1, 1, 7)$, j) $D = \mathrm{diag}(0, 2, 2)$, k) $D = \mathrm{diag}(2, 2, 7)$,

7. Z údajov ktoré sú zadané o reálnej symetrickej matici A zistite, ako vyzerá kanonický tvar príslušnej kvadratickej formy.
   a) Matica A je *kladne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
   b) Matica A je *záporne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
   c) A je nenulová symetrická matica rozmerov 3×3, ktorá má nulovú stopu aj determinant, t.j. $\det(A) = \mathrm{Tr}(A) = 0$.
8. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a *ortogonálnu* maticu P také, že platí $PAP^T = D$.
   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
   e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;
   i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; j) $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$
   Výsledky: a) $\mathrm{diag}(0, 4, 10)$; b) $\mathrm{diag}(-1, -1, 2)$; c) $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$; d) $\mathrm{diag}(-1, -1, 5)$; e) $\mathrm{diag}(0, 0, 6)$; f) $\mathrm{diag}(-3, -3, 3)$; g) $\mathrm{diag}(-1, -1, 5)$; h) $\mathrm{diag}(0, 5, 12)$; i) $\mathrm{diag}(-3, -4, 6)$; j) $\mathrm{diag}(-5, -5, 16)$;