Jordanov tvar

Jordanov normálny tvar. Každá štvorcová matica nad $\mathbb{C}$ je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Počet lineárne nezávislých vlastných vektorov k λ určuje počet blokov, ktoré prislúchajú k λ.
Veľkosti blokov by sme mohli nájsť tak, že hľadáme *zovšeobecnené vlastné vektory,* t.j. vektory také, že $\vec{x}(A-\lambda I)^k = \vec{0}$.
Môžeme ich zistiť aj pomocou hodnosti mocnín matice $(A-\lambda I)$: Počet blokov (pre vlastnú hodnotu λ) veľkosti aspoň k je $h((A-\lambda I)^{k-1}) - h((A-\lambda I)^k)$.

Pretože matice A a jej Jordanov tvar J sú podobné, budú mať rovnaký minimálny polynóm aj charakteristický polynóm, hodnosť, stopu a determinant.

Ak nie je zadané inak, vo všetkých úlohách pracujeme s maticami nad $\mathbb{C}$.

1. Nájdite k-tu mocninu zadanej matice pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Vedeli by ste výsledok zovšeobecniť na ľubovoľné rozmery? (T.j. na matice rozmerov $n \times n$ namiesto 4×4.)

2. [K, Exercise 4101] Nájdite Jordanov tvar danej matice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Nájdite charakteristický polynóm a Jordanov tvar:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -23 & 21 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. [P, 1090–1093] Nájdite charakteristický polynóm a Jordanov tvar danej matice:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Ukážte, že ľubovoľná štvorcová matica A je podobná s transponovanou maticou A^T. (Hint: Najprv to skúste overiť pre maticu, ktorá je v Jordanovom tvare.)
6. Čomu sa rovná A^{30} pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

(Dá sa nejako využiť Jordanov tvar? Vedeli by ste úlohu vyriešiť aj bez použitia Jordanovho tvaru?)
7. Ak má matica (nad poľom $\mathbb{C}$) uvedené vlastnosti dá sa z nich už jednoznačne určiť Jordanov tvar matice A? Ak je viacero možností pre Jordanov tvar, nájdite všetky.
a) Matica A rozmerov 4×4 je singulárna a $h(A - 2I) = 1$.
b) Pre maticu A rozmerov 4×4 platí $h(A - 2I) = 2$ a $h((A - 2I)^2) = 0$, pričom 2 je jediné vlastné číslo matice A.
c) Matica A má charakteristický polynóm $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-3)^2$ a platí $h(A-3I) = 2$ a $h(A - 2I) = 3$.
d) Matica A má charakteristický polynóm $\chi_A(x) = (x - 1)^4$, platí $A^2 + I = 2A$ a súčasne $A \neq I$.
e) Matica A má charakteristický polynóm $\chi_A(x) = (x - 1)^4$, platí $(A - I)^2 \neq 0$ a $(A - I)^3 = 0$.
f) Matica A má charakteristický polynóm $\chi_A(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$ a platí $\dim(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4; \vec{x}A = \vec{x}\}) = \dim(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4; \vec{x}A = -\vec{x}\}) = 1$.

Literatúra

[K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. OPA, Amsterdam, 1996.

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.