Symetrické polynómy

Základné symetrické polynómy:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sum x_1 = x_1 + \dots + x_n \\
A_2 &= \sum x_1 x_2 \\
&\vdots \\
A_k &= \sum x_1 x_2 \dots x_k \\
&\vdots \\
A_n &= \sum x_1 x_2 \dots x_n = x_1 x_2 \dots x_n
\end{aligned}
$$

Vedúci člen polynómu $A_1(x_1,\dots,x_n)^{k_1} \cdot A_2(x_1,\dots,x_n)^{k_2} \cdots A_n(x_1,\dots,x_n)^{k_n}$ (t.j. $A_1^{k_1} A_2^{k_2} \dots A_n^{k_n}$) je tvaru $x_1^{k_1+k_2\dots+k_n} \cdot x_2^{k_2\dots+k_n} \cdots x_n^{k_n}$.

Základná veta o symetrických polynómoch: Ku každému symetrickému polynómu $f(x_1,\dots,x_n) \in R[x_1,\dots,x_n]$ nad komutatívnym okruhom R s jednotkou existuje jednoznačne určený polynóm $p(x_1,\dots,x_n) \in R[x_1,\dots,x_n]$ tak, že platí

$$f(x_1 \dots x_n) = p(A_1(x_1,\dots,x_n),\dots,A_n(x_1,\dots,x_n)).$$

Viétove vzťahy – vzťah medzi koreňmi a koeficientami: Ak $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, tak $\frac{a_k}{a_n} = (-1)^{n-k} A_{n-k}(x_1,\dots,x_n)$, t.j.:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \\
&\vdots \\
\frac{a_{n-2}}{a_n} &= x_1 x_1 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \\
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)
\end{aligned}
$$

1. Zapíšte daný symetrický polynóm pomocou základných symetrických polynómov:
   a) $f(x_1,x_2,x_3) = \sum x_1^3 x_2 = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3$
   b) $f(x_1,x_2,x_3) = \sum x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$
   c) $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$
   d) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
   e) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$
   [Výsledky: a) $f = A_1^2 A_2 - 2A_2^2 - A_1 A_3$; b) $f = A_1 A_2 - 3A_3$; c) $A_1 A_2 - A_3$; d) $A_1^2 - 2A_2$; e) $A_1^3 - 3A_1 A_2 + 3A_3$]
2. Je zadaný polynóm symetrický? Vyjadrite ho pomocou základných symetrických polynómov:
   a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3$;
   b) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_3^2$;
   c) $x_1^5 x_2^2 + x_1^2 x_2^5 + x_1^5 x_3^2 + x_1^2 x_3^5 + x_2^5 x_3^2 + x_2^2 x_3^5$;
   d) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;
   e) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$;
   f) $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$

3. Nech $x_{1,2,3} \in \mathbb{C}$ sú korene rovnice $x^3 - 5x + 11 = 0$.
   a) Aká je hodnota výrazu $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$?
   b) Aká je hodnota výrazu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$?
4. Nájdite (v $\mathbb{C}$) riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 4 \end{aligned}$$

5. Nájdite riešenia všetky danej sústavy nad $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ (a+b)(b+c)(c+a) &= 18 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

6. Nájdite všetky riešenia danej sústavy v $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 35 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 97 \end{aligned}$$