Podobnosť s diagonálnou maticou

20. marca 2023

Podobnosť s diagonálnou maticou

$$PAP^{-1} = D$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

Mocnina matice

$$A^{100} = P^{-1}\,\mathrm{diag}(d_1^{100}, d_2^{100}, \dots, d_n^{100})P$$

$$e^A = P^{-1}(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots)P = P^{-1}\cdot\mathrm{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n})\cdot P$$

$$e^{At} = P^{-1}\cdot\mathrm{diag}(e^{d_1 t}, \dots, e^{d_n}t)\cdot P$$

$$f'(t) = Af(t)$$

$$(e^{At})' = P(e^{Dt})'P^{-1} = PDe^{Dt}P^{-1} = PDP^{-1}Pe^{Dt}P^{-1} = Ae^{At}$$

Podobnosť s diagonálnou maticou

$$PAP^{-1} = D$$

$$PA = DP$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} A = D \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 A \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ d_n \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_i A = d_i \vec{\alpha}_i.$$

Vlastné čísla

Definícia

Nech A je štvorcová matica nad poľom F. Prvok $c \in F$ nazveme *vlastným číslom* matice A, ak existuje nenulový vektor $\vec{\alpha} \in F^n$ taký, že $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$.

Nenulový vektor $\vec{\alpha} \in F^n$ nazývame *vlastným vektorom* matice A, ak existuje $c \in F$ (c môže byť aj 0) také, že $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$.

Vlastné čísla

Definícia

Ak $\vec{\alpha}$ je nenulový vektor a pre $c \in F$ platí $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$, hovoríme, aj, že (vlastný) vektor $\vec{\alpha}$ prislúcha ku vlastnému číslu c, alebo že (vlastné) číslo c prislúcha ku vlastnému vektoru $\vec{\alpha}$.

Vlastné čísla

1. c je vlastné číslo matice A
2. Existuje nenulový vektor $\vec{\alpha}$ taký, že $\vec{\alpha}A = c\vec{\alpha}$
3. Existuje nenulový vektor $\vec{\alpha}$ taký, že $\vec{\alpha}A = \vec{\alpha}(cI)$ (I je identická matica)
4. Existuje nenulový vektor $\vec{\alpha}$ taký, že $\vec{\alpha}(A - cI) = \vec{0}$
5. Jadro zobrazenia s maticou $A - cI$ je netriviálne (t.j. toto zobrazenie nie je injektívne, t.j. matica $A - cI$ je singulárna).
6. Determinant matice $A - cI$ je nulový.

Charakteristický polynóm

Definícia

charakteristický polynóm

$$ch_A(x) = |A - xI|$$

$$\vec{\alpha}(A - cI) = \vec{0} \Rightarrow (A - cI)^T = \vec{0}^T$$

Vlastné čísla

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$ch_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)(4-x) - 0 \cdot 2 = 4 - 5x + x^2$$

Vlastné vektory k 1: [(-3,2)]
Vlastné vektory k 4: [$(0,1)$]

Vlastné čísla

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ch_A(x) = (1-x)^3$$

Vlastné vektory k 1: $[(0, 0, 1)]$

Báza z vlastných vektorov

Veta

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová matica typu $n \times n$ nad poľom F. Potom A je podobná s diagonálnou maticou práve vtedy, keď spomedzi vlastných vektorov vieme vybrať bázu.

Rôzne vlastné čísla

Lema

Nech $A = ||a_{ij}||$ *je štvorcová matica typu* $n \times n$ *nad poľom* F *a vlastné čísla* $c_1, \ldots, c_k$ *matice* A *sú navzájom rôzne prvky poľa* F, $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ *sú vlastné vektory po rade prislúchajúce* $c_1, \ldots, c_k$. *Potom sú vektory* $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_k$ *lineárne nezávislé.* (*Stručne: Rôznym vlastným číslam zodpovedajú lineárne nezávislé vlastné vektory.*)

Dôsledok

Nech $A = ||a_{ij}||$ *je štvorcová matica typu* $n \times n$ *nad poľom* F *a vlastné čísla* $c_1, \ldots, c_n$ *matice* A *sú navzájom rôzne prvky poľa* F (*t.j.* A *má* n *navzájom rôznych vlastných čísiel z poľa* F). *Potom* A *je podobná s diagonálnou maticou.*

Charakteristický polynóm

Lema

Nech A, B sú štvorcové matice typu $n \times n$ nad poľom F. Ak A a B sú podobné, tak $ch_A(x) = ch_B(x)$.

Dôsledok

Pre maticu $A = ||a_{ij}||$ - štvorcová matica typu $n \times n$ nad poľom F položme $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ - t.j. $\mathrm{Tr}(A)$ je súčet prvkov na diagonále matice A. Ak sú matice A, B podobné, tak $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Hodnota $\mathrm{Tr}(A)$ sa nazýva *stopa matice* A.

Koeficienty charakteristického polynómu

$$\chi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}(a_{11} - x)\cdots(a_{nn} - x) &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn})x^{n-1} + \dots \\ &= (-1)^n x + (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A)x^{n-1} + \dots\end{aligned}$$

Koeficienty charakteristického polynómu

$$
\begin{aligned}
\chi_A(x) &= c_x n^x + c_{x-1} n^{x-1} + \cdots + c_0^n \\
c_n &= (-1)^n \\
c_{n-1} &= (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} \\
c_0 &= \det(A)
\end{aligned}
$$

Ortogonálna podobnosť

Ortogonálna matica je definovaná ako matica P spĺňajúca podmienku $P^T = P^{-1}$
Matice A a B sú *ortogonálne podobné*, ak existuje ortogonálna matica P taká, že

$$B = PAP^{-1} = PAP^T.$$

Schurova veta

Veta (Schurova veta)

Nech $A = \|a_{ij}\|$ *je štvorcová matica typu* $n \times n$ *nad poľom* $\mathbb{R}$*. Nech všetky vlastné čísla matice* A *sú z poľa* $\mathbb{R}$*. Potom existuje horná trojuholníková matica* T*, ktorá je ortogonálne podobná s maticou* A*.*

Vlastné čísla symetrickej matice

Veta

Nech $A = ||a_{ij}||$ je štvorcová symetrická matica typu $n \times n$ nad poľom $\mathbb{R}$, potom všetky vlastné čísla matice A sú z poľa $\mathbb{R}$.

Veta o hlavných osiach

Veta (o hlavných osiach)

Nech $A = ||a_{ij}||$ *je štvorcová symetrická matica typu* $n \times n$ *nad poľom* $\mathbb{R}$, *potom* A *je ortogonálne podobná s diagonálnou maticou.*

Ortogonálna podobnosť

Príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Spektrálny rozklad

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T & \dots & \vec{\alpha}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T & \dots & \vec{\alpha}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ d_n \vec{\alpha}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
A = d_1 \vec{\alpha}_1^T \vec{\alpha}_1 + d_2 \vec{\alpha}_2^T \vec{\alpha}_2 + \dots + d_n \vec{\alpha}_n^T \vec{\alpha}_n \tag{1}
$$

Cayley-Hamiltonova veta

Veta (Cayley-Hamilton)

Nech A je štvorcová matica nad poľom F. Potom A je koreňom svojho charakteristického polynómu, presnejšie ak je $ch_A(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ tak $(-1)^n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0 I = \|0\|_{n\times n}$.

Cayley-Hamiltonova veta

$$A \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I,$$

Cayley-Hamiltonova veta

$$\mathrm{adj}(A - xI) = \mathrm{adj}(B) = C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$$

Označme si $ch_A(x) = |B| = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

$$\begin{aligned}|B| \cdot I &= (-1)^n I x^n + c_{n-1} \cdot I x^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot I x + c_0 I \\ &= B \cdot \mathrm{adj}(B) = (A - xI) \cdot (C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0)\end{aligned}$$

Cayley-Hamiltonova veta

$$\begin{aligned}
c_0 I &= AC_0 \\
c_1 I &= AC_1 - C_0 \\
c_2 I &= AC_2 - C_1 \\
&\cdots \\
c_{n-1} I &= AC_{n-1} - C_{n-2}
\end{aligned}$$

a nakoniec

$$(-1)^n I = -C_{n-1}$$

Cayley-Hamiltonova veta

$$
\begin{array}{rcl}
c_0 I & = & AC_0 \\
c_1 A & = & A^2 C_1 - AC_0 \\
c_2 A^2 & = & A^3 C_2 - A^2 C_1 \\
 & \dots & \\
c_{n-1} A^{n-1} & = & A^n C_{n-1} - A^{n-1} C_{n-2} \\
\text{a nakoniec} & & \\
(-1)^n A^n & = & -A^n C_{n-1}
\end{array}
$$

Po sčítaní ľavých a pravých strán týchto rovníc dostaneme

$$ch_A(A) = 0.$$