Krivky druhého rádu

19. apríla 2021

Ortogonálne matice 2×2

$$OO^T = I$$

$$\langle \vec{\alpha}O, \vec{\beta}O \rangle = \vec{\alpha}O(\vec{\beta}O)^T = \vec{\alpha}OO^T\vec{\beta}^T = \vec{\alpha}\vec{\beta}^T = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle.$$

Ortogonálne matice 2 × 2

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$OO^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Popis kriviek druhého rádu

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + d$$

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; f(x_1, x_2) = 0\}$$

$$g(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$PAP^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$f(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2b_1y_1 + 2b_2y_2 + d' = 0$$

Popis kriviek druhého rádu

$$f(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2b_1 y_1 + 2b_2 y_2 + d' = 0.$$

Ak $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$:

$$f(z_1, z_2) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + d'' = 0.$$

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ a $d'' < 0$ alebo $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ a $d'' > 0$ – *elipsa*
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ a $d'' > 0$ alebo $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ a $d'' < 0$ – nemá riešenie.
- Ak λ_1 a λ_2 majú rôzne znamienka a $d'' \neq 0$, je to *hyperbola.*
- Ak $d'' = 0$ tak ide buď o *jednobodovú množinu* alebo o *dvojicu pretínajúcich sa priamok*.

Popis kriviek druhého rádu

$$f(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2b_1 y_1 + 2b_2 y_2 + d' = 0.$$

Ak $\lambda_1 \lambda_2 = 0$:

$$\lambda_2 z_2^2 + 2b_1 z_1 + d'' = 0.$$

Je to *parabola*, *priamka* alebo *dvojica rovnobežných priamok.*

Invarianty kriviek druhého rádu

Definícia

Invariantom krivky druhého rádu

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + d = 0$$

rozumieme taký algebraický výraz závisiaci od a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2 a d, ktorý sa nezmení, ak túto krivku vyjadríme v iných súradniciach, ktoré dostaneme posunutím a otočením.

Invarianty kriviek druhého rádu

Tvrdenie

Výrazy $s = \mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$, $\delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ *a*

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & d \end{vmatrix}$ *sú invariantmi krivky druhého rádu*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + d = 0$$

Invarianty kriviek druhého rádu

$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	elipsa alebo prázdna množina
$\delta > 0$	$\Delta = 0$	jediný bod
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	hyperbola
$\delta < 0$	$\Delta = 0$	pretínajúce sa priamky
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	parabola
$\delta = 0$	$\Delta = 0$	rovnobežné priamky alebo $\emptyset$