Jordanov normálny tvar

19. apríla 2021

Jordanov normálny tvar

Definícia

Jordanov blok veľkosti k prislúchajúci číslu λ je matica typu $k \times k$ tvaru

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanov normálny tvar

Veta (Jordanov normálny tvar)

Pre každú maticu A nad $\mathbb{C}$ existuje blokovo diagonálna matica J, ktorej diagonálne bloky sú Jordanove bloky taká, že A je podobná s maticou J.
Matica J sa nazýva Jordanov normálny tvar matice A.
Navyše platí, že matica J je jednoznačne určená až na poradie Jordanových blokov na diagonále.
Ďalej platí, že dve matice A a B sú podobné práve vtedy, keď majú rovnaký Jordanov tvar (až na poradie Jordanových blokov).

Jordanov normálny tvar

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_j}(\lambda_{j-1}) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{k_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

Jordanov normálny tvar

$$PAP^{-1} = J_n(\lambda) \Leftrightarrow PA = J_n(\lambda)P$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_{n-1} \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_{n-1} \\ \vec{\alpha}_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 A \\ \vec{\alpha}_2 A \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_{n-1} A \\ \vec{\alpha}_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\vec{\alpha}_1 + \alpha_2 \\ \lambda\vec{\alpha}_2 + \alpha_3 \\ \vdots \\ \lambda\vec{\alpha}_{n-1} + \alpha_n \\ \lambda\vec{\alpha}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Jordanov normálny tvar

$$\vec{\alpha}_n A = \lambda \vec{\alpha}_n$$

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{n-1} A &= \lambda \vec{\alpha}_{n-1} + \alpha_n \\ \vec{\alpha}_{n-1}(A - \lambda I) &= \vec{\alpha}_n \\ (A - \lambda I)^T \vec{\alpha}_{n-1}^T &= \vec{\alpha}_n^T \end{aligned}$$

Jordanov normálny tvar

$$
\begin{aligned}
\vec{\alpha}_n A &= \lambda \vec{\alpha}_n \\
\vec{\alpha}_{n-1} A &= \lambda \vec{\alpha}_{n-1} + \vec{\alpha}_n \\
&\vdots \\
\vec{\alpha}_1 &= \lambda \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2
\end{aligned}
$$

Jordanov normálny tvar

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Jordanov normálny tvar

$$ch_A(x) = \begin{vmatrix} 6-x & 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2-x & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3-x & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)^5$$

Jordanov normálny tvar

$$(A-2I)^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 lineárne nezávislé vlastné vektory $\Rightarrow$ 2 bloky

$$[(0,1,1,0,0),(0,0,0,2,-1)]$$

Jordanov normálny tvar

Jordanov normálny tvar

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordanov normálny tvar

$$\text{počet blokov} = n - h(A - \lambda I)$$
$$\text{počet blokov} \geq 2 = h(A - \lambda I) - h((A - \lambda I)^2)$$
$$\text{počet blokov} \geq k = h((A - \lambda I)^{k-1}) - h((A - \lambda I)^k)$$

Jordanov normálny tvar

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^3 = 0$$