# Symetrické polynómy

3. mája 2021

# Polynómy viac premenných

$R[x_1, x_2] = R[x_1][x_2], \ldots, R[x_1, x_2, \ldots, x_n] = R[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}][x_n]$
Zapisujeme v normálnom tvare:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

# Lexikografické usporiadanie

$ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ vs. $bx_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$

$$
\begin{aligned}
(k_1, \dots, k_n) > (l_1, \dots, l_n) \Leftrightarrow & (k_1 > l_1) \vee \\
& ((k_1 = l_1) \wedge (k_2 > l_2)) \vee \\
& ((k_1 = l_1) \wedge (k_2 = l_2) \wedge (k_3 > l_3)) \vee \\
& \vee \dots
\end{aligned}
$$

Vedúci člen = najvyšší pri lexikografickom usporiadaní exponentov

# Lexikografické usporiadanie

**Tvrdenie**

*Vedúci člen súčinu dvoch polynómov je súčin ich vedúcich členov.*

# Symetrické polynómy

## Definícia

Polynóm $f(x_1, \ldots, x_n)$ voláme symetrický ak pre každdú permutáciu $\varphi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$f(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

T.j. symetrický polynóm = nezmení sa pri akejkoľvek výmene premenných.

# Označenie $\sum$

$\sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ = „najmenší“ symetrický polynóm obsahujúci $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$

$$\sum x_1 x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$\sum x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$$

# Základné symetrické polynómy

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sum x_1 = x_1 + \cdots + x_n \\
A_2 &= \sum x_1 x_2 \\
&\vdots \\
A_k &= \sum x_1 x_2 \ldots x_k \\
&\vdots \\
A_n &= \sum x_1 x_2 \ldots x_n = x_1 x_2 \ldots x_n
\end{aligned}
$$

# Základné symetrické polynómy

**Lema**

*Vedúci člen polynómu* $A_1(x_1,\dots,x_n)^{k_1}\cdot A_2(x_1,\dots,x_n)^{k_2}\cdots A_n(x_1,\dots,x_n)^{k_n}$ *(t.j.* $A_1^{k_1}A_2^{k_2}\dots A_n^{k_n}$*) je tvaru*

$$x_1^{k_1+k_2\cdots+k_n}\cdot x_2^{k_2\cdots+k_n}\cdots x_n^{k_n}.$$

**Lema**

*Ak* $f(x_1,\dots,x_n)$ *je symetrický polynóm a* $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ *je jeho vedúci člen, tak platí*

$$k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_n.$$

# Základná veta o symetrických polynómoch

**Veta**

*Ku každému symetrickému polynómu $f(x_1, \ldots, x_n) \in R[x_1, \ldots, x_n]$ nad komutatívnym okruhom $R$ s jednotkou existuje jednoznačne určený polynóm $p(x_1, \ldots, x_n) \in R[x_1, \ldots, x_n]$ tak, že platí*

$$f(x_1 \ldots x_n) = p(A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Stručnejší zápis: $f = p(A_1, \ldots, A_n)$

# Homogénne polynómy

- *Homogénny polynóm stupňa* $k$ = pre každý člen $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ platí $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$. (Súčet exponentov je konštantný.)
- Súčet homogénnych polynómov je homogénny (toho istého stupňa).
- Súčin homogénnych polynómov je homogénny (stupne sa sčítajú).

# Viétove vzťahy

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

$$\frac{a_k}{a_n} = (-1)^{n-k} A_{n-k}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1 x_1 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$