Ekvivalentné formy axiómy výberu

24. februára 2021

Axióma výberu

Axióma VIII (Axióma výberu)

$$(\forall \mathcal{S})[(\forall A \in \mathcal{S})(A \neq \emptyset) \wedge (\forall A \in \mathcal{S})(\forall B \in \mathcal{S})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists V)(\forall A \in \mathcal{S})(\exists x)(V \cap A = \{x\})]$$

Pre každý systém neprázdnych po dvoch disjunktných množín existuje výberová množina, t.j. taká množina, ktorá má s každou z množín tohoto systému jednoprvkový prienik.

Ekvivalentné formy axiómy výberu

Definícia

Nech $\mathcal{S}$ je množina. Zobrazenie $f\colon \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ sa nazýva *selektor* alebo tiež *výberová funkcia* na množine $\mathcal{S}$, ak platí

$$(\forall x \in \mathcal{S}) f(x) \in x.$$

Ekvivalentné formy axiómy výberu

Tvrdenie (ZF)

Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné (ako tvrdenia ZF):

(i) *axióma výberu;*

(ii) *pre každý systém neprázdnych po dvoch disjunktných množín existuje selektor;*

(iii) *pre každý systém neprázdnych množín existuje selektor;*

Ekvivalentné formy axiómy výberu

(iv) karteziánsky súčin ľubovoľného systému neprázdnych množín je neprázdny, t.j.

$$(\forall i \in I) X_i \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset;$$

(v) ak R je relácia medzi množinami A a B taká, že pre každé $a \in A$ existuje $b \in B$ s vlastnosťou aRb, tak existuje funkcia $f\colon A \to B$ taká, že $f \subseteq R$;

(vi) ak $f\colon A \to B$ je surjekcia, tak existuje $g\colon B \to A$ také, že $f \circ g = id_B$.

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f\colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i; f(i) \in X_i\}$$

Zornova lema a princíp dobrého usporiadania

Definícia

Podmnožinu čiastočne usporiadanej množiny $(P, \leq)$, ktorá je usporiadaním $\leq$ lineárne usporiadaná, budeme nazývať *reťazec* v P.

Lema

Nech A je množina a $\mathcal{C} \neq \emptyset$ je systém čiastočných usporiadaní na množine A taký, že pre ľubovoľné $C, D \in \mathcal{C}$ platí $C \subseteq D$ alebo $D \subseteq C$. (Inak povedané, $\mathcal{C}$ je reťazec v množine všetkých relácií čiastočného usporiadania na A čiastočne usporiadanej reláciou $\subseteq$.) Potom $R := \bigcup \mathcal{C}$ je tiež čiastočné usporiadanie na A.

Zornova lema a princíp dobrého usporiadania

Veta (ZF)

Nasledujúce podmienky sú (ako tvrdenia systému ZF) ekvivalentné s axiómou výberu:

(WO) *Na každej množine existuje dobré usporiadanie.*

(PM) *Pre každý reťazec v čiastočne usporiadanej množine $(P, \leq)$ existuje maximálny reťazec, ktorý ho obsahuje.*

(ZL) *Ak každý reťazec v čiastočne usporiadanej množine $(P, \leq)$ má horné ohraničenie, tak $(P, \leq)$ má maximálny prvok.*