Aplikácie axiómy výberu a Zornovej lemy

16. marca 2023

Spojitosť

Definícia (Cauchyho definícia spojitosti)

Funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá* v bode $a \in \mathbb{R}$, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definícia (Heineho definícia spojitosti)

Funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *sekvenciálne spojitá* v bode $a \in \mathbb{R}$, ak pre každú postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ reálnych čísel takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Spojitosť

Tvrdenie

Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia a $a \in \mathbb{R}$. Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď je sekvenciálne spojitá v bode a.

- Dôkaz využíva axiómu výberu.
- Podobné tvrdenie pre *globálnu* spojitosť sa dá ukázať bez AC (Sierpiński).

$$x_n \in A_n = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon\}$$

Globálna spojitosť

Tvrdenie (ZF)

Funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá práve vtedy, keď f je sekvenciálne spojitá.

Lema

Ak $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je sekvenciálne spojitá, tak pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$ je $f|_{\mathbb{Q}\cup\{a\}}$ spojitá.

Globálna spojitosť

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \mathbb{Q})|z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pre x také, že $|x - a| < \delta$ máme:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_x > 0)(\forall z \in \mathbb{Q})|x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\mathbb{Q}$ je hustá $\Rightarrow$ $(a - \delta, a + \delta) \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)$ obsahuje nejaké racionálne číslo.

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Alexandrova veta o subbáze

Veta (Alexander subbase theorem)

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je jeho subbáza. Ak každé pokrytie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ má konečné podpokrytie, tak X je kompaktný.

Topologický súčin

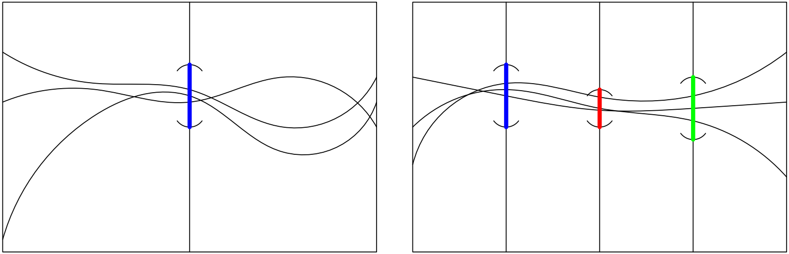

Figure: Obrázok znázorňuje typickú množinu zo subbázy (resp. bázy) spolu s niektorými funkciami patriacimi do tejto množiny

Tichonovova veta

Veta (Tichonovova veta)

Topologický súčin kompaktných priestorov je kompaktný. T.j. ak X_i je kompaktný topologický priestor pre každé $i \in I$, tak aj $\prod_{i \in I} X_i$ je kompaktný priestor.

Tichonovova veta

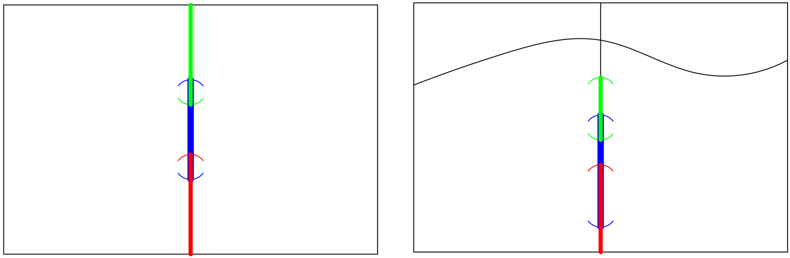

Figure: Dve možné situácie, ktorými sa zaoberáme v dôkaze Tichonovovej vety: Buď máme na niektorej súradnici pokrytie celého X_i, alebo vieme nájsť funkciu, ktorá nepatrí do žiadnej množiny z pokrytia

Hahnova-Banachova veta

Definícia

Nech X je vektorový priestor a $f\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcia.

(i) Funkcia f je *konvexná* ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ a $\alpha \in (0,1)$ platí

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

(ii) Funkcia f je *subaditívna,* ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ platí

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

(iii) Funkcia f je *pozitívne homogénna,* ak pre ľubovoľné $\alpha > 0$ a $x \in X$ platí $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Hahnova-Banachova veta

Definícia

(iv) Funkcia f je *sublineárna,* ak je subaditívna a pozitívne homogénna

(v) Funkcia f je *polonorma,* ak je subaditívna a pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$ platí $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$.

Definícia

Nech $f, p \colon X \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq X$. Hovoríme, že funkcia f je *majorizovaná funkciou p na množine M,* ak

$$(\forall x \in M) f(x) \leq p(x).$$

Hahnova-Banachova veta

Veta (Hahn-Banach)

Nech X je vektorový priestor a $p\colon X \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia. Nech M je podpriestor X a nech $f\colon M \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál, ktorý je na M majorizovaný funkciou p. Potom existuje lineárna funkcia $\widehat{f}$, ktorá je rozšírením f na celé X a je majorizovaná funkciou p na celom X.

Navyše pre $x \in X$ existuje rozšírenie nadobúdajúce hodnotu $\widehat{f}(x) = c$ práve vtedy, keď

$$\sup_{m\in M,\lambda>0} \frac{f(m) - p(m-\lambda x)}{\lambda} \leq c \leq \inf_{m\in M,\mu>0} \frac{p(m+\mu x) - f(m)}{\mu}. \tag{1}$$

Hahnova-Banachova veta

V prípade, že p je kladne homogénna, možno vyjadrenie tohoto intervalu zjednodušiť na

$$\sup_{m\in M}[f(m)-p(m-x)]\leq c\leq \inf_{m\in M}[p(m+v)-f(m)].$$

Ak funkcie p a f navyše spĺňajú podmienku

$$(\forall x\in X)(\forall y\in M)p(x+y)=p(x)+f(y),$$

tak sa tento interval dá zjednodušiť na tvar

$$-p(-x)\leq c\leq p(x).$$

Hahnova-Banachova veta

Lema

Nech X je vektorový priestor a $p\colon X \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia. Nech M je podpriestor X a nech $f\colon M \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál, ktorý je na M majorizovaný funkciou p. Nech ďalej $x \in X$. Potom existuje lineárne zobrazenie $\overline{f}\colon [M \cup \{x\}] \to \mathbb{R}$, ktoré rozširuje f je na podpriestore $[M \cup \{x\}]$ majorizované funkciou p. Možné hodnoty, ktoré môže takéto rozšírenie nadobúdať v bode x, sú presne hodnoty z intervalu uvedeného v (1).

Hahnova-Banachova veta

Dôsledok

Nech X je lineárny normovaný priestor, M je podpriestor priestoru X a nech $f\colon M \to \mathbb{R}$ je ohraničený lineárny funkcionál. Potom existuje lineárny funkcionál $\widehat{f}\colon X \to \mathbb{R}$ rozširujúci f, pre ktorý platí $\|\widehat{f}\| = \|f\|$.

Definícia miery

Definícia

Množina $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *σ-algebra* na množine X, ak platí

(i) $X \in \mathcal{S}$;

(ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$; (množina $\mathcal{S}$ je uzavretá vzhľadom na vytváranie doplnkov)

(iii) $A_n \in \mathcal{S}$ pre $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$; (množina $\mathcal{S}$ je uzavretá vzhľadom na spočítateľné zjednotenia).

Definícia miery

Definícia

Ak $\mathcal{S}$ je nejaká σ-algebra na X, tak funkcia $m\colon \mathcal{S} \to \langle 0, \infty\rangle$ je *miera na* $\mathcal{S}$ ak platí $m(\emptyset) = 0$ a

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$$

pre každý spočítateľný systém $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ disjunktných množín z $\mathcal{S}$.

Prvky σ-algebry $\mathcal{S}$ sa v takomto prípade zvyknú nazývať *merateľné množiny.*

Definícia miery

Stručne: Miera je nezáporná σ-aditívna funkcia a $m(\emptyset) = 0$.

$$A \subseteq B \wedge A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow m(A) \leq m(B).$$

Translačne inveriantná miera

Definícia

Miera $m\colon \mathcal{S} \to \langle 0, \infty \rangle$ na množine $\mathbb{R}$ sa nazýva *invariantná na posun* alebo *translačne invariantná,* ak pre každú množinu $A \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathbb{R}$ aj množina

$$x + A = \{x + a; a \in A\}$$

patrí do $\mathcal{S}$ a platí

$$m(x + A) = m(A).$$

Existencia nemerateľnej množiny

Tvrdenie

Neexistuje translačne invariantná miera $m\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \langle 0, \infty \rangle$ *taká, že* $m(\langle a, b \rangle) = b - a$ *pre ľubovoľné* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Banach-Tarskiho paradox

Veta (Banach-Tarski)

Pre ľubovoľné dve ohraničené množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *ktoré majú neprázdne vnútro, existujú rozklady* $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ *a* $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ *na konečný počet množín také, že* A_i *a* B_i *sú kongruentné (t.j. jednu z druhej možno získať posunutím a otočením).*