Definícia ordinálnych čísel (naivná)

30. marca 2023

Naivný prístup k ordinálnym číslam

Definícia ordinálnych čísel:

- Naivná – typy dobre usporiadaných množín.
- Axiomatická (v ZFC) – Von Neumannova definícia

Porovnanie s kardinálmi

- Vieme povedať, čo znamená $|A| = |B|$, $|A| \leq |B|$, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.
- Ale nepovedali sme aká množina je $\aleph_0$ alebo aká množina je $|A|$.
- Vieme „preložiť“ $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$ ako vzťah medzi množinami $A^{B \times C}$ a $(A^B)^C$.
- Vieme „preložiť“ $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ ako vzťah medzi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Porovnanie s kardinálmi

Tvrdenie	Preklad
$(a^b)^c = a^{b\cdot c}$	$\lvert (A^B)^C \rvert = \lvert A^{B\times C} \rvert$
$a \cdot b = b \cdot a$	$\lvert A \times B \rvert = \lvert B \times A \rvert$
$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$	$\lvert \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rvert = \lvert \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rvert$

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Porovnanie s kardinálmi

- Čo je suprémum kardinálnych čísel $\sup\{a_i; i \in I\}$?

Ordinálne čísla ako ordinálne typy

- Pre dobre usporiadanú množinu máme ordinálne číslo $\alpha = \mathrm{ot}(A, \leq)$.
- $\alpha = \beta$, ak $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$
- $\alpha \leq \beta$, ak $(A, \leq_A)$ je izomorfné s počiatočným úsekom $(B, \leq_B)$.

Ordinálne čísla ako ordinálne typy

Správa sa $=$ a $\leq$ dobre?

- Je $\leq$ dobre definované?
- reflexívnosť a tranzitívnosť
- $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ (Neexistuje izomorfizmus s vlastným počiatočným úsekom.)
- $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$

Ordinálne čísla ako ordinálne typy

Vieme ordinálne čísla (ordinálne typy) porovnávať. Ešte sa nám hodí:

- nasledovník;
- suprémum;
- Je to dobré usporiadanie?
- Vzťah ku kardinalite.

Nasledovník a suprémum

Ak $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina, tak pre každé $a \in A$ nastane niektorá z možností:

- $a = \min A$;
- $a = S(b)$ pre nejaké $b \in A$;
- $a = \sup\{b \in A; b < a\}$

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Nech $(A, \leq)$ *je dobre usporiadaná množina a* $f : A \to A$ *je injektívne monotónne zobrazenie. Potom pre každé* $a \in A$ *platí* $a \leq f(a)$.

Môžeme dokazovať indukciou na množine A.

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Pre každé ordinálne číslo α existuje jeho nasledovník $\beta = S(\beta) = \alpha + 1$.

Tvrdenie

Pre každú množinu ordinálnych čísel existuje suprémum

$$\sup\{\alpha_i; i \in I\}$$

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je $(A_i, \leq_i)$ dobre usporiadaná množina. Potom existuje dobre usporiadaná množina $(B, \leq)$ taká, že každé A_i je izomorfné s počiatočným úsekom B.

Ľahká modifikácia: Každé A_i je izomorfné s vlastným počiatočným úsekom $(B, \leq)$.

Nasledovník a suprémum

Induktívna limita:

- Definujme $i \leq j$ ak $\mathrm{ot}(A_i, \leq_i) \leq \mathrm{ot}(A_j, \leq_j)$.
- Vloženie $f_{ij} \colon A_i \to A_j$.
- Platí $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$
- Na $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ (b.ú.n.v. disjunktné) definujeme

$$a \sim b \Leftrightarrow b = f_{ij}(a).$$

- Nerovnosť definujeme cez

$$[a] \leq [b] \Leftrightarrow a \leq_i b.$$

Nasledovník a suprémum

- Relácia $\sim$ je relácia ekvivalencie.
- Máme $e_i\colon A_i \hookrightarrow B$ definovaná ako $e_i(a) = [a]$.
- Relácia $\leq$ je dobré usporiadanie.
- Zobrazenie e_i je monotónne a $e_i[A_i]$ je počiatočný úsek.

Nasledovník a suprémum

Tvrdenie

Nech $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ sú dobre usporiadané množiny, pričom A je izomorfná s nejakou podmnožinou množiny B. Potom A je izomorfná s počiatočným úsekom množiny B.

Pre $\{(A_i, \leq_i), i \in I\}$ teraz stačí zobrať $\sum\limits_{i \in I}(A_i, \leq_i)$. Treba ale nejaké dobré usporiadanie na I.

Lexikografický súčet

Ak $(I, \leq)$ a všetky $(A_i, \leq_i)$ sú dobre usporiadané (a disjunktné), tak $\bigcup_{i \in I} A_i$ vieme usporiadať lexikograficky

$$a \leq b \Leftrightarrow (a, b \in A_i \wedge a \leq_i b_i) \vee$$
$$(a \in A_i \wedge b \in b_j \wedge i \leq j)$$

Označujeme $\sum_{i \in I} (A_i, \leq_i)$.

Dobré usporiadanie na $(I, \leq)$

Ak $\{A_i; i \in I\}$ je množina dobre usporiadaných množín, pričom pre $i, j \in I$ platí $i \neq j \Rightarrow \mathrm{ot}(A_i) \neq \mathrm{ot}(A_j)$, tak predpis

$$i \leq j \Leftrightarrow A_i \text{ je izomorfné s počiatočným úsekom } A_j$$

určuje dobré usporiadanie na množine I.

Počiatočné úseky

Tvrdenie

Nech $(X, \leq)$ *je lineárne usporiadaná množina a nech* $X' = \{X_a; a \in X\}$. *Potom zobrazenie* $f\colon X \to X'$ *určené predpisom*

$$f(a) = X_a$$

je izomorfizmus medzi čiastočne usporiadanými množinami $(X, \leq)$ *a* $(X', \subseteq)$.

Ordinály a dobre usporiadané množiny

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je α_i ordinálne číslo. Potom existuje dobre usporiadaná množina $(B, \leq)$ a monotónne injektívne zobrazenie $f\colon (\{\alpha_i; i \in I\}, \leq) \to (B, \leq)$. Navyše pre $a_i = f(\alpha_i)$ máme $\alpha_i = \operatorname{ot}(B_{a_i})$.

Stručne: Ľubovoľnú množinu ordinálov môžeme stotožniť s podmnožinou vhodnej dobre usporiadanej množiny.

$$\alpha_i = \operatorname{ot}(A_i, \leq_i)$$

Ordinály a dobre usporiadané množiny

- Pre každý ordinál existuje nasledovník $S(\alpha) = \alpha + 1$.
- Pre každú množinu ordinálov existuje suprémum.
- Každá množina ordinálov je dobre usporiadaná.
- Pre každý ordinál platí $\alpha = \mathrm{ot}(\{\beta \in \mathrm{On}; \beta < \alpha\})$

Ordinály tvoria *vlastnú triedu* – neexistuje množina všetkých ordinálov.

Limitné ordinály

Ak $\alpha \neq 0$ a α nie je nasledovník iného ordinálu, voláme ho *Limitný ordinál.*

$$\alpha = \sup\{\beta \in \mathrm{On}; \beta < \alpha\}$$

Pre ľubovoľný ordinál α platí práve jedna z možností:

- $\alpha = 0$;
- $\alpha = S(\beta)$ pre nejaké $\beta \in \mathrm{On}$;
- α je limitný ordinál.

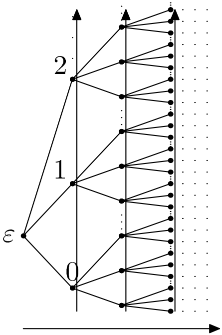
Ordinál ω

$$\omega = \mathrm{ot}(N, \leq)$$

Máme potom napríklad $\omega + \omega$, $\omega \cdot \omega$, ω^{ω}.

$$\omega_1 = \text{najmenší nespočítateľný ordinál}$$

Ordinál ω^ω



Ordinály a kardinalita

Tvrdenie

Nech $(A, \leq)$ je dobre usporiadaná množina. Potom existuje dobré usporiadanie $\leq'$ na A také, že pre každý vlastný počiatočný úsek pri tomto usporiadaní platí

$$|A_a| < |A|.$$