# Ordinály – prehľad a porovnanie definícií

13. apríla 2023

# Naivný prístup k ordinálnym číslam

- Pre každú dobre usporiadanú množinu existuje jediný ordinál taký, že $\alpha = \mathrm{ot}(A, \leq)$
- Ak $\alpha = \mathrm{ot}(A, \leq)$ a $\beta = \mathrm{ot}(B, \leq')$, tak $\alpha \leq \beta$ znamená, že $(A, \leq)$ je počiatočný úsek $(B, \leq')$

# Naivný prístup k ordinálnym číslam

- Pre každý ordinál existuje nasledovník $S(\alpha) = \alpha + 1$.
- Pre každú množinu ordinálov existuje suprémum.
- Každá množina ordinálov je dobre usporiadaná.
- Pre každý ordinál platí $\alpha = \mathrm{ot}(\{\beta \in \mathrm{On}; \beta < \alpha\})$

# Limitné ordinály

Ak $\alpha \neq 0$ je ordinál, tak platí jedna z možností:

- $\alpha$ je nasledovník: $\alpha = S(\beta) = \beta + 1$ pre nejaké $\beta \in \mathrm{On}$;
- $\alpha$ je limitný ordinál $\alpha = \sup\{\beta \in \mathrm{On}; \beta < \alpha\}$.

# Axiomatický prístup k ordinálnym číslam

Pri tejto definícii platí

$$\alpha = \{\beta \in \mathrm{On}; \beta < \alpha\},$$

t.j. každý ordinál sa rovná množine všetkých ordinálov od neho menších.

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$$
$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

# Axiomatický prístup k ordinálnym číslam

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

$$\sup\{\alpha_i; i \in I\} = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$$

# Axiomatický prístup k ordinálnym číslam

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\
2 &= \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
\omega &= \{0,1,2,\dots\}
\end{aligned}
$$

# Kardinálne čísla

Kardinálne čísla = iniciálne ordinály, t.j. najmenší ordinál danej kardinality.