

Aplikácie transfinitnej indukcie

20. apríla 2023

Silno darbouxovské funkcie

Tvrdenie

Existuje podmnožina $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ taká, že všetky x -ové rezy $A_x = \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ sú jednoprvkové a všetky y -ové rezy $A^y = \{x \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ sú husté v \mathbb{R} .

Silno darbouxovské funkcie

Funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je:

- ▶ *darbouxovská*, ak na každom intervale (a, b) nadobúda všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$;
- ▶ *silno darbouxovská*, ak na každom intervale nadobúda všetky reálne hodnoty.

f je spojitá $\Rightarrow f$ je deriváciou $\Rightarrow f$ je Darbouxovská

Kardinálna aritmetika

Veta

Pre každý kardinál $a \geq \aleph_0$ platí $a \cdot a = a$.

Dôsledok

Ak a, b sú nekonečné kardinály, tak

$$a + b = ab = \max\{a, b\}.$$

Dôsledok

Pre ľubovoľnú nekonečnú množinu A platí

$$|A| = |A \times A|.$$

Kardinálna aritmetika

Dôsledok

Pre ľubovoľnú nekonečnú množinu A platí

$$|A| = |A \times A|.$$

Tarski: V ZF je AC ekvivalentná s tvrdením, že pre každé $|A| \geq \aleph_0$ platí $|A| = |A \times A|$.

Kardinálna aritmetika

 $(A \times A, \leq^*)$

$$(a_1, b_1) <^* (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (m_1 < m_2) & \vee \\ (m_1 = m_2 \wedge a_1 < a_2) & \vee \\ (m_1 = m_2 \wedge a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2) \end{cases}$$

Zornova lema

- ▶ Nech (P, \leq) je čiastočne usporiadaná množina, ktorá nemá maximálny prvok.
- ▶ Pre každé p platí $p \uparrow = \{q \in P; q > p\} \neq \emptyset$.
- ▶ Transfinitnou indukciou dokážeme existenciu reťazca bez horného ohraničenia.

Steinitzova veta

Veta (Steinitzova veta)

Pre každé pole existuje algebraicky uzavreté nadpole, ktoré ho obsahuje.