

Tabuľka grupy S_3 :

	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
id	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	id
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	id
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	id	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

1 Podgrupy

H je podgrupa grupy $(G, *)$ ak H je neprázdna podmnožina G a platí:

- pre ľubovoľné $x, y \in H$ platí $x * y \in H$ a $x^{-1} \in H$;
- pre ľubovoľné $x, y \in H$ platí $x * y^{-1} \in H$.

Každá podgrupa obsahuje neutrálny prvok.

- 1.1. Nájdite všetky podgrupy grupy S_3 . (LAG1 1.4.6.(8))
- 1.2. Nech $(G, *)$ je grupa a $H \neq \emptyset$ je konečná podmnožina taká, že pre ľubovoľné $x, y \in H$ platí $x * y \in H$. Potom H je podgrupa grupy G . (LAG1 1.4.6(4))
- 1.3. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n}; m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.
- 1.4. Je množina $A = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{R}, +)$?
- 1.5. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a všetky podgrupy grupy \mathbb{Z}_4 (v oboch prípadoch operácia \oplus). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Viete na základe výsledku zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?)
- 1.6. Je množina $H = \{\ln a; a \in \mathbb{Q}, a > 0\}$ podgrupou grupy $(\mathbb{R}, +)$?
- 1.7. Nech H je podgrupa grupy G . Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}; h \in H\}$ je podgrupa grupy G .
- 1.8. Nech $M \neq \emptyset$ a G je množina všetkých bijektívnych zobrazení z M do M . Je \circ binárna operácia na G ? Je (G, \circ) grupa? Je komutatívna?
- 1.9. Uvažujme funkcie $f_i: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definované ako $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = 1/(1 - x)$, $f_5(x) = (x - 1)/x$, $f_6(x) = x/(x - 1)$. Dokážte, že $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu. Zostavte tabuľku grupovej operácie a zistite, či je táto grupa izomorfná s grupou S_3 .
- 1.10. Nájdite príklad nekonečnej grupy, ktorá obsahuje netriviálnu konečnú podgrupu. (Pod netriviálnou podgrupou tu rozumieme podgrupu, ktorá má viac ako jeden prvok.)
- 1.11*. Nech G je grupa a H_1, H_2 sú jej podgrupy. Dokážte, že $H_1 \cup H_2$ je podgrupa práve vtedy, keď $H_1 \subseteq H_2$ alebo $H_2 \subseteq H_1$.
- 1.12*. Ak A, B, C sú podgrupy grupy G a $C \subseteq A \cup B$, tak $C \subseteq A$ alebo $C \subseteq B$.
- 1.13. Nech $(G_1, *_1), (G_2, *_2)$ sú grupy. Zoberme grupu $(G_1 \times G_2, *)$, kde

$$(a, b) * (a', b') = (a *_1 a', b *_2 b'),$$

t.j. G je priamy súčin grup $G_1 \times G_2$.

a) Ukážte, že ak H_1 je podgrupa G_1 a H_2 je podgrupa G_2 , tak $H_1 \times H_2$ je podgrupa grupy $G_1 \times G_2$.

b) Nájdite príklad grup G_1, G_2 takých, že $G_1 \times G_2$ má podgrupu, ktorá sa nedá dostať ako $H_1 \times H_2$ pre žiadne $H_1 \subseteq G_1, H_2 \subseteq G_2$.

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

2 Homomorfizmy grúp

$$f: (G, *) \rightarrow (H, \square)$$

$$f(x * y) = f(x) \square f(y)$$

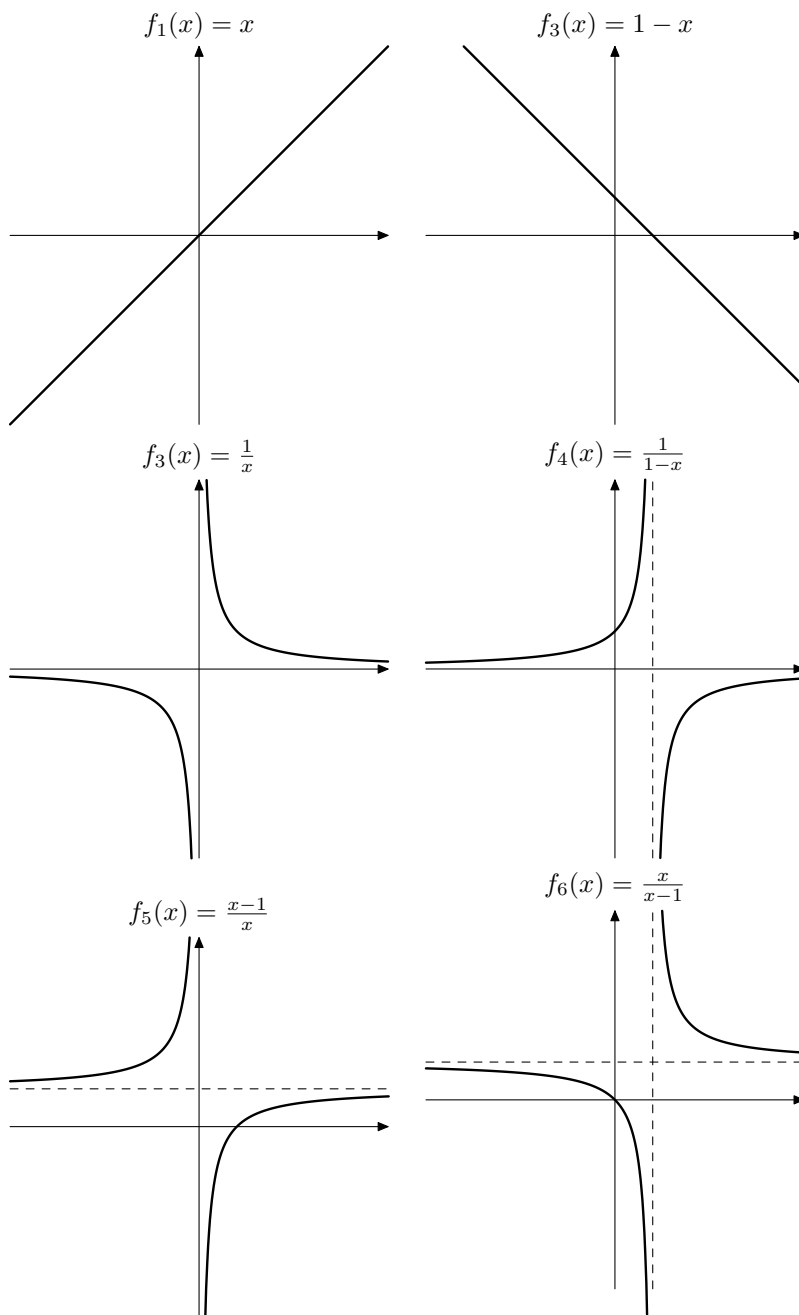
- 2.1. Dokážte: Nech $(G, *)$ a (H, \circ) sú grupy a G je komutatívna. Ak existuje izomorfizmus $f: G \rightarrow H$, tak aj (H, \circ) je komutatívna grupa. (Teda grupa izomorfná s komutatívnou grupou je komutatívna.) Platí toto tvrdenie, ak predpoklad o existencii izomorfizmu nahradíme požiadavkou na existenciu homomorfizmu? Čo sa stane, ak budeme požadovať existenciu surjektívneho homomorfizmu (=epimorfizmu)?
- 2.2. Zistite, či sú grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ izomorfné.
- 2.3. Sú grupy (S_3, \circ) a $(\mathbb{Z}_6, +)$ izomorfné?
- 2.4. Sú grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ izomorfné? (Operáciu $+$ na množine $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ chápeme po zložkách, t.j. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \oplus_2 x_2, y_1 \oplus_3 y_2)$. Operácie \oplus_2 a \oplus_3 označujú sčítovanie modulo 2 resp. modulo 3 – na tomto mieste som použil iné označenie, aby som zdôraznil, že na prvej a na druhej súradnici máme inú operáciu.)
- 2.5. Sú grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ izomorfné?
- 2.6. Nájdite všetky homomorfizmy $(S_3, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$.
- 2.7. Nech $(G, *)$ je ľubovoľná grupa. Dokážte, že zobrazenie $g \mapsto g * g$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.
- 2.8. Nech $(G, *)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $g \mapsto g^{-1}$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna.
- 2.9. Dá sa výsledok z predchádzajúceho cvičenia použiť na iný dôkaz toho, že $(a_1 * a_2 * \dots * a_n)^2 = e$ platí pre konečnú komutatívnu grupu $G = \{e, a_1, \dots, a_n\}$?
- 2.10. Nech $f, g: G \rightarrow H$ sú homomorfizmy grúp. Je množina $\{a \in G; f(a) = g(a)\}$ podgrupa grupy G ?
- 2.11. Nech $(G, *)$ je grupa. Ukážte, že $(G, *')$ s operáciou definovanou ako¹

$$x *' y = y * x$$

je tiež grupa a že tieto dve grupy sú izomorfné, t.j. $(G, *) \cong (G, *')$.

- 2.12. V tejto úlohe môžete používať fakt, že počet prvkov podgrupy je deliteľ počtu prvkov grupy (Lagrangeova veta) – aj keď tento výsledok dokážeme až neskôr.
 - a) Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Je táto grupa izomorfná s grupou \mathbb{Z}_8 ?
 - b) Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Je táto grupa izomorfná s grupou \mathbb{Z}_9 ?
- 2.13. Ukážte, že grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ je izomorfná s grupou \mathbb{Z}_{10} .

¹Wikipédia: Opposite group https://en.wikipedia.org/wiki/Opposite_group



Obr. 1: Grupa zo šiestich funkcií f_1, \dots, f_6