Termín na odovzdanie: cvičenia počas druhého týždňa semestra.

---

Dokážte **matematickou indukciou**, že pre prirodzené čísla $n \geq 3$ platí:

$$(n+1)^n < n^{n+1}.$$

Spomeniem aj to, že táto nerovnosť sa ekvivalentne dá prepísať ako

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Postupnosť $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ veľmi úzko súvisí s číslom $e$ a budete s ňou pomerne veľa pracovať na matematickej analýze.

A túto nerovnosť môžeme zapísať aj ako

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

Teda vlastne o postupnosti $b_n = \sqrt[n]{n}$ ukazujeme, že je klesajúca (od istého člena).

Termín na odovzdanie: cvičenia počas tretieho týždňa semestra (4. októbra 2022).

---

Platí nasledujúce tvrdenie? Ak áno, dokážte ho, ak nie, nájdite kontrapríklad: Ak $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ sú zobrazenia také, že $g \circ f$ je injekcia, tak $g$ je injekcia.

Termín na odovzdanie: cvičenia počas štvrtého týždňa semestra (11. októbra 2022).

---

Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \ldots, a_n\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a $e$ je jej neutrálny prvok. (Prvky $e, a_1, \ldots, a_n$ sú navzájom rôzne.) Dokážte, že

$$(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e.$$

Termín na odovzdanie: cvičenia počas piateho týždňa semestra (18. októbra 2022).

---

Nech $(G, \cdot)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $\varphi\colon g \mapsto g^{-1}$ je homomorfizmus z $(G, \cdot)$ do $(G, \cdot)$ práve vtedy, keď $G$ je komutatívna.

Na zamyslenie: Vedeli by ste to čo ste dokázali tu (spolu s faktom, že zobrazenie $\varphi$ je bijekcia) použiť na dôkaz výsledku z úlohy z minulého týždňa? (Za túto časť nie sú body, ale možno by sa vám takéto niečo mohlo zdať zaujímavé, takže som to aspoň spomenul.)

Termín na odovzdanie: cvičenia počas šiesteho týždňa semestra (25. októbra 2022).

---

Máme reláciu $\sim$ na množine:
a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
zadanú podmienkou

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x \cdot y \geq 0.$$

V oboch prípadoch zistite, či ide o reláciu ekvivalencie. Ak ide o reláciu ekvivalencie, tak zistite aj to, koľko dostaneme tried ekvivalencie.

Termín na odovzdanie: 8. novembra 2022 (na cvičeniach).
1. novembra je štátny sviatok – tento týždeň budú zadané dve úlohy; interval na odovzdávanie je dvojtýždňový.

---

Nech $G$ je komutatívna grupa, $f\colon G \to G'$ je homomorfizmus grúp a $H = \operatorname{Ker} f$. Ako $[a]$ označíme triedu prvku $a$ vo faktorovej grupe $G/H$.

Dokážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí

$$[a] = \{x \in G; f(x) = f(a)\}.$$

(Týmto vlastne dokážeme, že triedy rozkladu podľa $\operatorname{Ker} f$ sú presne vzory jednoprvkových podmnožín $\operatorname{Im} f$.)

Termín na odovzdanie: 8. novembra 2022 (na cvičeniach).
1. novembra je štátny sviatok – tento týždeň budú zadané dve úlohy; interval na odovzdávanie je dvojtýždňový.

---

Pre grupu $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ definujme zobrazenie $f\colon G \to G$ predpisom

$$f(x) = \frac{x^2}{|x|^2}.$$

a) Dokážte, že $f$ je homomorfizmus.
b) Zistite, čomu sa rovná $H = \operatorname{Ker} f$.
c) Nájdite podgrupu $G'$ grupy $G$ takú, že $G/H \cong G'$.
Svoje tvrdenia zdôvodnite.

Termín na odovzdanie: 15. novembra 2022 (na cvičeniach).
8. novembra bolo v utorok namiesto výberového cvika povinné – aj tak som ale pridal nové zadanie; aby ste mali možnosť zbierať body.

---

Majme štvorprvkovú množinu $F = \{0, 1, a, b\}$ a binárne operácie $+$, $\cdot$ na tejto množine. Ak viete, že $(F, +, \cdot)$ je pole, tak doplňte zvyšok zadaných tabuliek:

| $+$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
| $1$ | | $0$ | | |
| $a$ | | | $0$ | |
| $b$ | | | | $0$ |

| $\cdot$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | | | | |
| $b$ | | | | |

T.j. v tabuľkách máme zadané, že $0 + x = x$ a $x + x = 0$ pre všetky $x \in F$. A tiež to, že $0 \cdot x = 0$ a $1 \cdot x = 1$ pre všetky $x \in F$.

Zdôvodnite, prečo váš výsledok je jediná možnosť, ako sa tieto tabuľky dajú doplniť. (To, či na konci naozaj vyšlo pole, overovať nemusíte.)

**Poznámka.** Jeden z dôvodov, prečo som pridal takýto príklad, je ukázať, že existuje aj štvorprvkové pole. (Z konečných polí ste sa zatiaľ stretli s poľami, ktoré majú prvočíselný počet prvkov. Neskôr sa na iných predmetoch dozviete, že existujú aj iné konečné polia a aj to ako všetky také polia vyzerajú. Z toho, čo sa naučíte tam, sa štvorprkové pole bude dať dostať oveľa jednoduchšie – tu vlastne máme zadanú tabuľku sčitovania a násobenia, ale nevieme, prečo sa hodia práva takéto operácie.)

Termín na odovzdanie: 22. novembra 2022 (na cvičeniach).

---

Nájdite čísla $x, y \in \mathbb{Z}$ také, že

$$12x + 79y = 1.$$

Čomu sa rovná inverzný prvok k 12 v poli $\mathbb{Z}_{79}$?

Termín na odovzdanie: 29. novembra 2022 (na cvičeniach).

---

Zistite, ktorý z vektorov $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sa dá pridať k $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ tak, aby sme dostali bázu priestoru $\mathbb{R}^4$. (Je možné, že to neplatí pre žiadny z týchto vektorov, alebo že je viacero možností – v takom prípade je vašou úlohou nájsť všetky.)

Dajú sa vektory

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (1,1,1,1) \\ \vec{a}_2 &= (1,2,2,1) \\ \vec{a}_3 &= (2,1,2,1) \end{aligned}$$

doplniť na bázu priestoru $\mathbb{R}^4$ niektorým z vektorov $\vec{x} = (1,3,0,-2)$, $\vec{y} = (2,1,1,2)$, $\vec{z} = (1,1,-1,3)$?

Termín na odovzdanie: 6. decembra 2022 (na cvičeniach).

---

Vypočítajte hodnosť danej matice $3 \times 3$ nad poľom $\mathbb{R}$ v závislosti od hodnoty parametra $c \in \mathbb{R}$. (T.j. ako odpoveď sa očakáva to, že pre každú reálnu hodnotu $c$ budete vedieť povedať čomu sa rovná $h(A)$. Z odovzdaného riešenia by malo byť jasné, na základe čoho ste k takému výsledku dospeli.)

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 2 \\ 2 & 1-c & 0 \\ 1+c & 1-c & 1 \end{pmatrix}$$

Je explicitne povolené využívať to, že $h(A) = h(A^T)$, a teda hodnosť sa nemení nielen pri riadkových ale ani pri stĺpcových úpravách. (Aj keď na prednáške ešte dôkaz takéhoto tvrdenia nebol.)

Termín na odovzdanie: 13. decembra 2022 (na cvičeniach).

---

Vypočítajte maticu $A^{-1}$ pre zadanú maticu $A$ rozmerov $3 \times 3$ nad poľom $\mathbb{R}$ v závislosti od hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$. (A súčasne zistite, pre ktoré hodnoty parametra inverzná matica neexistuje.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Termín na odovzdanie: 13. januára 2023 (koniec druhého týždňa skúškového obdobia).

---

Nájdite počet
a) všetkých
b) injektívnych
c) surjektívnych
lineárnych zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$ takých, že platí

$$f(2,1,0,1) = (1,1,3)$$
$$f(1,3,2,1) = (2,1,2)$$
$$f(4,2,1,1) = (4,1,0)$$