Rozšírenia polí

5. decembra 2022

Rozšírenie poľa

Definícia

Nech $(K, +, \cdot)$ je pole a $F \subseteq K$ je podmnožina, ktorá s operáciami $+$ a $\cdot$ zúženými na F tiež tvorí pole.
Potom hovoríme, že F je *podpole* poľa K. A tiež hovoríme, že K je *rozšírenie* poľa F.

Príklad

Pole $\mathbb{R}$ je rozšírením poľa $\mathbb{Q}$. Pole $\mathbb{C}$ je rozšírením poľa $\mathbb{R}$.

Stupeň rozšírenia

Tvrdenie

Nech K je rozšírenie poľa F. Potom K je vektorový priestor nad poľom F.

Definícia

Nech K je rozšírenie poľa F. Hovoríme, že *konečné rozšírenie,* ak K má ako vektorový priestor nad poľom F konečnú dimenziu. Dimenziu tohto vektorového priestoru potom nazývame *stupeň rozšírenia* a označujeme $[K : F]$.

Stupeň rozšírenia

$$[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$$

Pole $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0; a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = d = 0. \quad (1)$$

Pole $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$$

Viacnásobené rozšírenie

Veta

Nech K je konečné rozšírenia poľa F, L je konečné rozšírenie poľa K. Potom L je aj konečné rozšírenie poľa F a pre ich stupne platí

$$[K : F] = [K : L] \cdot [L : F] \tag{2}$$

Dôsledok

Nech K je konečné rozšírenia poľa F a $u \in K$. Potom stupeň prvku u nad F delí stupeň rozšírenia K.

$$[u : F] \mid [K : F]$$