

Podpriestory

4. októbra 2021

Topologické konštrukcie

- ▶ podpriestor
- ▶ faktorový priestor
- ▶ topologický súčet
- ▶ topologický súčin
- ▶ Zovšeobecnenie: Iniciálna a finálna topológia.

Definícia podpriestoru

Definícia

Nech (X, \mathcal{T}) je topologický priestor a $S \subseteq X$. Ak položíme

$$\mathcal{T}_S = \{U \cap S; U \in \mathcal{T}\},$$

tak \mathcal{T}_S je tiež topológia.

Dvojicu (S, \mathcal{T}_S) nazývame *podpriestor* topologického priestoru X .

Topológiu \mathcal{T}_S budeme tiež nazývať *relatívna topológia*.

Ak S je otvorená podmnožina v X , hovoríme o *otvorenom podpriestore*. Podobne, S je *uzavretý podpriestor*, ak S je uzavretá podmnožina.

Báza, uzáver, vnútro

- ▶ báza $\mathcal{B}_S = \{U \cap S; U \in \mathcal{B}\}$
- ▶ báza okolí $\mathcal{B}'_X = \{B \cap S; B \in \mathcal{B}_X\}$
- ▶ uzavretosť: $C = C' \cap X$.
- ▶ $\text{cl}_S(A) = \text{cl}_X(A) \cap S$
- ▶ $\text{Int}_S(A) = \text{Int}_X(A) \cap S$

Podpriestor

Príklad

- ▶ podpriestor diskretného priestoru
- ▶ podpriestor indiskretného priestoru
- ▶ podpriestor metrického priestoru

$$B_S(x, r) = \{y \in S; d(x, y) < r\} = B(x, r) \cap S.$$

Podpriestor

Tvrdenie

Ak S je podpriestor priestoru T a T je podpriestor priestoru X , tak S je podpriestor priestoru X .

Ak S, T sú podpriestory priestoru X a $S \subseteq T$, tak aj S je podpriestor priestoru T .

Podpriestor

Tvrdenie

Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Nech S je podpriestor priestoru X a nech T je podpriestor priestoru Y . Predpokladajme ďalej, že $f[S] \subseteq T$. Potom:

- Ak $f: X \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie, tak aj zúženie $f|_S: S \rightarrow Y$ je spojité zobrazenie.*
- Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité práve vtedy, keď $f: X \rightarrow T$ je spojité.*

Definícia vloženia

Definícia

Nech $i: S \rightarrow X$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi S a X nazveme *vloženie* ak $i: S \rightarrow i[S]$ je homeomorfizmus medzi S a podpriestorom $i[S]$ priestoru X . Označujeme $i: S \hookrightarrow X$.

Vloženie

Tvrdenie

Nech $S \subseteq X$, pričom (S, \mathcal{T}_S) a (X, \mathcal{T}_X) sú topologické priestory. Definujme $i: S \rightarrow X$ ako $i(x) = x$ pre všetky $x \in S$. Potom platí: (S, \mathcal{T}_S) je podpriestor priestoru $(X, \mathcal{T}$) práve vtedy, keď $i: (S, \mathcal{T}_S) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ je vloženie.

Vloženie

Tvrdenie

Ak $f: X \hookrightarrow Y$ aj $g: Y \hookrightarrow Z$ sú vloženia, tak aj zložené zobrazenie $g \circ f: X \rightarrow Z$ je vloženie.

Dôsledok

Ak $f: X \hookrightarrow Y$ je vloženie a S je podpriestor priestoru X , tak aj zúženie $f|_S: S \rightarrow Y$ je vloženie.

Vloženie

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, S je jeho podpriestor. Nech $i_S: S \hookrightarrow X$ je vloženie S do X .

Nech Y je topologický priestor a $g: Y \rightarrow S$ je zobrazenie. Potom g je spojité práve vtedy, keď $e \circ g$ je spojité.

Dedičné vlastnosti

Definícia

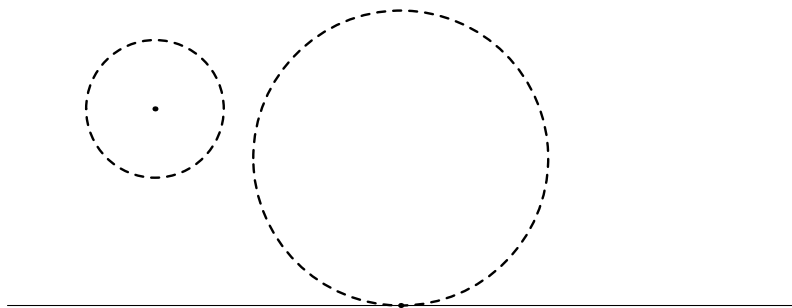
Topologickú vlastnosť P (resp. triedu topologických priestorov) nazveme *dedičná*, ak pre každý priestor s vlastnosťou P má vlastnosť P aj každý jeho podpriestor.

O *otvoreno (uzavreto) dedičnej* vlastnosti hovoríme, ak to platí pre otvorené (uzavreté) podpriestory.

Axiómy spočítateľnosti

- ▶ Podpriestor priestoru spĺňajúceho prvú axiómu spočítateľnosti tiež spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti.
- ▶ Podpriestor priestoru spĺňajúceho druhú axiómu spočítateľnosti tiež spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti.
- ▶ Podpriestor separabilného priestoru nemusí byť separabilný. (Moorova rovina nie je dedične separabilný priestor.)

Moorova rovina



Pokrytie

Definícia

Nech X je topologický priestor. Systém $\mathcal{C} = \{C_i; i \in I\}$ podmnožín množiny X sa nazýva *pokrytie* priestoru X ak

$$\bigcup_{i \in I} C_i = X,$$

Ak každý prvok z \mathcal{C} je otvorená množina, tak \mathcal{C} je *otvorené pokrytie*.

Ak každý prvok z \mathcal{C} je uzavretá množina, tak \mathcal{C} je *uzavreté pokrytie*.

Ak \mathcal{C} je lokálne konečný systém, tak \mathcal{C} je *lokálne konečné pokrytie*.

Otvorené pokrytie

Tvrdenie

*Nech $\{U_i; i \in I\}$ je otvorené pokrytie topologického priestoru X .
Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie do topologického priestoru Y .
Ak pre každé $i \in I$ je zúženie $f|_{U_i}: U_i \rightarrow Y$ spojité, tak aj zobrazenie f je spojité.*

$$f^{-1}[V] = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}[V] \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}[V]$$

Lokálne konečné uzavreté pokrytie

Tvrdenie

Nech X, Y je topologický priestor a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Nech $\{C_i; i \in I\}$ je lokálne konečné uzavreté pokrytie priestoru X . Ak pre každé $i \in I$ je zúženie $f|_{C_i}: C_i \rightarrow Y$ spojité, tak aj zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je spojité.

$$f^{-1}[C] = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}[C] \cap C_i) = \bigcup_{i \in I} (f|_{C_i})^{-1}[C]$$