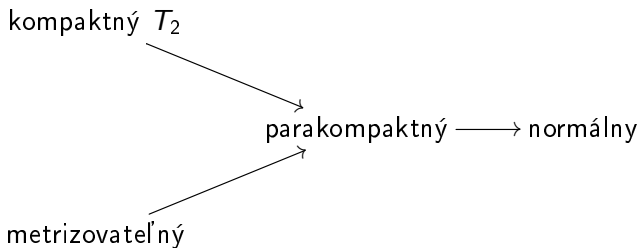


# Parakompaktné priestory

12. decembra 2022

## Parakompaktné priestory



parakompaktnosť  $\Leftrightarrow$  existuje rozklad jednotky.

# Zjemnenie

## Definícia

Nech  $\mathcal{U}$  je pokrytie množiny  $X$ . Hovoríme, že  $\mathcal{V}$  je *zjemnenie* pokrytia  $\mathcal{U}$ , ak  $\mathcal{V}$  je tiež pokrytie množiny  $X$  a navyše pre každé  $V \in \mathcal{V}$  existuje  $U \in \mathcal{U}$  také, že  $V \subseteq U$ .

$$(\forall V \in \mathcal{V})(\exists U \in \mathcal{U})(V \subseteq U)$$

Fakt, že  $\mathcal{V}$  je zjemnenie  $\mathcal{U}$  označujeme  $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ .

$$\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \prec \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \prec \mathcal{W}$$

Ak  $\mathcal{V}$  je podpokrytie  $\mathcal{U}$ , tak  $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$

# Zjemnenie

- ▶ *otvorené zjemnenie* = všetky prvky sú otvorené
- ▶ *uzavreté zjemnenie* = všetky prvky sú uzavreté
- ▶ Zjemnenie musí tiež byť **pokrytie**.

# Parakompaktné priestory

## Definícia

Topologický priestor  $X$  sa nazýva *parakompaktný*, ak je hausdorffovský a pre každé otvorené pokrytie  $\mathcal{U}$  priestoru  $X$  existuje lokálne konečné otvorené pokrytie  $\mathcal{V}$ , ktoré je zjemnením pokrytia  $\mathcal{U}$ .

- ▶ podpokrytie  $\Rightarrow$  zjemnenie
- ▶ kompaktný  $T_2 \Rightarrow$  parakompaktný
- ▶ diskretný  $\Rightarrow$  parakompaktný

# Ekvivalentné podmienky

## Definícia

Nech  $\mathcal{U}$  je systém podmnožín topologického priestoru  $X$ . Hovoríme, že systém  $\mathcal{U}$  je:

- (i) *diskrétny*, ak pre každý bod  $x$  existuje okolie  $U \ni x$ , ktoré má neprázdny prienik nanajvýš s jednou množinou z  $\mathcal{U}$ .
- (ii)  *$\sigma$ -lokálne konečný*, ak existujú systémy  $\mathcal{U}_n$  také, že  $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$  a  $\mathcal{U}_n$  je lokálne konečný pre každé  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  *$\sigma$ -diskrétny* ak existujú systémy  $\mathcal{U}_n$  také, že  $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$  a  $\mathcal{U}_n$  je diskretný pre každé  $n \in \mathbb{N}$ .

# Ekvivalentné podmienky

- ▶ Pre lokálne konečný systém platí

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

- ▶ Zjednotenie lokálne konečného systému uzavretých množín je uzavretá množina.
- ▶ Ak  $\{A_i; i \in I\}$  je lokálne konečný systém podmnožín topologického priestoru  $X$ , tak aj systém  $\{\overline{A_i}; i \in I\}$  je lokálne konečný.

# Ekvivalentné podmienky

## Veta

Nech  $X$  je  $T_3$ -priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i)  $X$  je parakompaktný, t.j. pre každé otvorené pokrytie existuje lokálne konečné otvorené zjemnenie.
- (ii) Pre každé otvorené pokrytie existuje  $\sigma$ -lokálne konečné otvorené zjemnenie.
- (iii) Pre každé otvorené pokrytie existuje lokálne konečné zjemnenie.
- (iv) Pre každé otvorené pokrytie existuje lokálne konečné uzavreté zjemnenie.



# Kompaktnosť a parakompaktnosť

## Veta

*Ak  $X$  je kompaktný  $T_2$ -priestor, tak  $X$  je parakompaktný.*

## Veta

*Každý lindelöfovský  $T_3$ -priestor je parakompaktný.*

# Parakompaktné priestory

- ▶ Uzavretý podpriestor parakompaktného priestoru je parakompaktný.
- ▶  $F_\sigma$  množina v parakompaktnom priestore je parakompaktná.
- ▶ Otvorený podpriestor parakompaktného priestoru nemusí byť parakompaktný.

# Metrizovateľné priestory

## Veta

*Ak  $X$  je metrizovateľný priestor, tak  $X$  je parakompaktný.*

*Navyše platí, že ak  $\mathcal{U}$  je ľubovoľné pokrytie  $X$ , tak existuje jeho  $\sigma$ -diskrétné otvorené zjemnenie  $\mathcal{V}$ .*

## Metrizovateľné priestory

$$U_n = \{x \in U; d(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{2^n}\}$$

$$d(U_n, X \setminus U_{n+1}) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \quad (1)$$

$$U_n^* = U_n \setminus \bigcup \{V_{n+1}; V \in \mathcal{U}, V \subset U\}$$

$$d(U_n^*, V_n^*) \geq d(V_n, X \setminus V_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$\tilde{U}_n = \{x \in X; d(x, U_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}\}$$

$$d(\tilde{U}_n, \tilde{V}_n) \geq \frac{1}{2^{n+2}} \quad (3)$$

# Parakompaktný priestor je normálny

## Lema

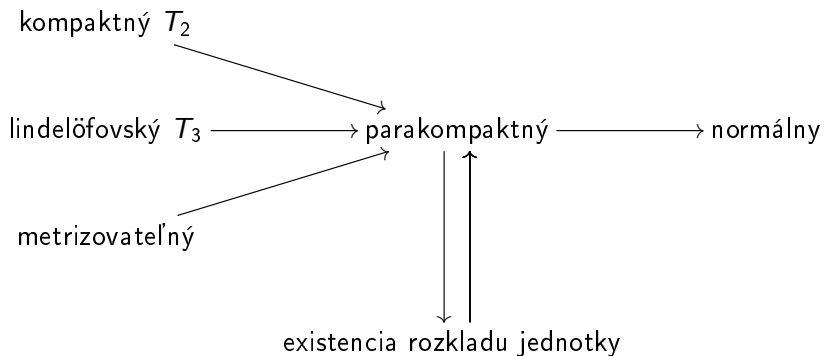
*Nech  $X$  je parakompaktný priestor a  $A, B \subseteq X$  sú uzavreté podmnožiny. Ak pre každé  $y \in B$  existujú otvorené množiny  $U_y, V_y$  také, že  $A \subseteq U_y, y \in V_y$  a  $U_y \cap V_y = \emptyset$ . Potom existujú otvorené množiny  $U, V$  tak, že*

$$A \subseteq U, B \subseteq V \text{ a } U \cap V = \emptyset.$$

## Veta

*Každý parakompaktný priestor je normálny (a teda aj  $T_4$ ).*

# Parakompaktné priestory



# Rozklad jednotky

## Definícia

System  $\{f_s; s \in S\}$  spojitých zobrazení  $X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  sa nazýva *rozklad jednotky*, ak platí:

- (i) Pre každé  $x \in X$  je množina

$$S_x = \{s \in S; f_s(x) \neq 0\}$$

spočítateľná.

- (ii) Pre každé  $x \in X$  platí

$$\sum_{s \in S} f_s(x) = 1. \quad (4)$$

# Rozklad jednotky

## Definícia

Aj  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia, tak množinu

$$\text{supp}(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$$

nazývame *nosič funkcie*  $f$ .

## Definícia

Rozklad jednotky  $\{f_s; s \in S\}$  v  $X$  sa nazýva *lokálne konečný rozklad jednotky*, ak systém  $\{\text{supp}(f_s); s \in S\}$  je lokálne konečný.



# Existencia rozkladu jednotky

## Lema

*Nech  $X$  je regulárny parakompaktný priestor. Potom pre každé otvorené pokrytie  $\{U_i; i \in I\}$  priestoru  $X$  existuje lokálne konečné uzavreté zjemnenie  $\{F_i; i \in I\}$  také, že pre všetky  $i \in I$  platí  $F_i \subseteq U_i$ .*

T.j. máme zjemnenie *s tou istou indexovou množinou* ako pôvodné pokrytie.

# Existencia rozkladu jednotky

## Veta

*Nech  $X$  je  $T_3$ -priestor.  $X$  je parakompaktný práve vtedy, keď pre každé otvorené pokrytie  $\mathcal{U}$  priestoru  $X$  existuje lokálne konečný rozklad jednotky taký, že*

$$\{\text{supp}(f_s); s \in S\} \prec \mathcal{U}$$