Parakompaktné priestory

12. decembra 2022

Parakompaktné priestory

$$
\begin{tikzcd}
\text{kompaktný } T_2 \arrow[dr] & & \\
& \text{parakompaktný} \arrow[r] & \text{normálny} \\
\text{metrizovateľný} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

parakompaktnosť $\Leftrightarrow$ existuje rozklad jednotky.

Zjemnenie

Definícia

Nech $\mathcal{U}$ je pokrytie množiny X. Hovoríme, že $\mathcal{V}$ je *zjemnenie* pokrytia $\mathcal{U}$, ak $\mathcal{V}$ je tiež pokrytie množiny X a navyše pre každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ také, že $V \subseteq U$.

$$(\forall V \in \mathcal{V})(\exists U \in \mathcal{U}) V \subseteq U$$

Fakt, že $\mathcal{V}$ je zjemnenie $\mathcal{U}$ označujeme $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

$$\mathcal{U} \prec \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \prec \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{U} \prec \mathcal{W}$$

Ak $\mathcal{V}$ je podpokrytie $\mathcal{U}$, tak $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$

Zjemnenie

- *otvorené zjemnenie* = všetky prvky sú otvorené
- *uzavreté zjemnenie* = všetky prvky sú uzavreté
- Zjemnenie musí tiež byť **pokrytie**.

Parakompaktné priestory

Definícia

Topologický priestor X sa nazýva *parakompaktný*, ak je hausdorffovský a pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X existuje lokálne konečné otvorené pokrytie $\mathcal{V}$, ktoré je zjemnením pokrytia $\mathcal{U}$.

- podpokrytie $\Rightarrow$ zjemnenie
- kompaktný T_2 $\Rightarrow$ parakompaktný
- diskrétny $\Rightarrow$ parakompaktný

Ekvivalentné podmienky

Definícia

Nech $\mathcal{U}$ je systém podmnožín topologického priestoru X. Hovoríme, že systém $\mathcal{U}$ je:

(i) *diskrétny*, ak pre každý bod x existuje okolie $U \ni x$, ktoré má neprázdny prienik nanajvýš s jednou množinou z $\mathcal{U}$.

(ii) *σ-lokálne konečný*, ak existujú systémy $\mathcal{U}_n$ také, že $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ a $\mathcal{U}_n$ je lokálne konečný pre každé $n \in \mathbb{N}$.

(iii) *σ-diskrétny* ak existujú systémy $\mathcal{U}_n$ také, že $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ a $\mathcal{U}_n$ je diskrétny pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Ekvivalentné podmienky

- Pre lokálne konečný systém platí
$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$
- Zjednotenie lokálne konečného systému uzavretých množín je uzavretá množina.
- Ak $\{A_i; i \in I\}$ je lokálne konečný systém podmnožín topologického priestoru X, tak aj systém $\{\overline{A_i}; i \in I\}$ je lokálne konečný.

Ekvivalentné podmienky

Veta

Nech X je T_3-priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *X je parakompaktný, t.j. pre každé otvorené pokrytie existuje lokálne konečné otvorené zjemnenie.*

(ii) *Pre každé otvorené pokrytie existuje σ-lokálne konečné otvorené zjemnenie.*

(iii) *Pre každé otvorené pokrytie existuje lokálne konečné zjemnenie.*

(iv) *Pre každé otvorené pokrytie existuje lokálne konečné uzavreté zjemnenie.*

Kompaktnosť a parakompaktnosť

Veta

Ak X je kompaktný T_2-priestor, tak X je parakompaktný.

Veta

Každý lindelöfovský T_3-priestor je parakompaktný.

Parakompaktné priestory

- Uzavretý podpriestor parakompaktného priestoru je parakompaktný.
- F_σ množina v parakompaktnom priestore je parakompaktná.
- Otvorený podpriestor parakompaktného priestoru nemusí byť parakompaktný.

Metrizovateľné priestory

Veta

Ak X je metrizovateľný priestor, tak X je parakompaktný. Navyše platí, že ak $\mathcal{U}$ je ľubovoľné pokrytie X, tak existuje jeho σ-diskrétne otvorené zjemnenie $\mathcal{V}$.

Metrizovateľné priestory

$$U_n = \{x \in U; d(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{2^n}\}$$

$$d(U_n, X \setminus U_{n+1}) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \tag{1}$$

$$U_n^* = U_n \setminus \bigcup \{V_{n+1}; V \in \mathcal{U}, V < U\}$$

$$d(U_n^*, V_n^*) \geq d(V_n, X \setminus V_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} \tag{2}$$

$$\widetilde{U}_n = \{x \in X; d(x, U_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}\}$$

$$d(\widetilde{U}_n, \widetilde{V}_n) \geq \frac{1}{2^{n+2}} \tag{3}$$

Parakompaktný priestor je normálny

Lema

Nech X je parakompaktný priestor a $A, B \subseteq X$ sú uzavreté podmnožiny. Ak pre každé $y \in B$ existujú otvorené množiny U_y, V_y také, že $A \subseteq U_y$, $y \in V_y$ a $U_y \cap V_y = \emptyset$. Potom existujú otvorené množiny U, V tak, že

$$A \subseteq U, B \subseteq V \text{ a } U \cap V = \emptyset.$$

Veta

Každý parakompaktný priestor je normálny (a teda aj T_4).

Parakompaktné priestory

$$
\begin{tikzcd}
\text{kompaktný } T_2 \arrow[dr] & & \\
\text{lindelöfovský } T_3 \arrow[r] & \text{parakompaktný} \arrow[r] \arrow[dd, shift right] & \text{normálny} \\
\text{metrizovateľný} \arrow[ur] & & \\
& \text{existencia rozkladu jednotky} \arrow[uu, shift right] &
\end{tikzcd}
$$

Rozklad jednotky

Definícia

Systém $\{f_s; s \in S\}$ spojitých zobrazení $X \to \langle 0, 1\rangle$ sa nazýva *rozklad jednotky,* ak platí:

(i) Pre každé $x \in X$ je množina

$$S_x = \{s \in S; f_s(x) \neq 0\}$$

spočítateľná.

(ii) Pre každé $x \in X$ platí

$$\sum_{s \in S} f_s(x) = 1. \tag{4}$$

Rozklad jednotky

Definícia

Aj $f : X \to \mathbb{R}$ je funkcia, tak množinu

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$$

nazývame *nosič funkcie f*.

Definícia

Rozklad jednotky $\{f_s; s \in S\}$ v X sa nazýva *lokálne konečný rozklad jednotky,* ak systém $\{\operatorname{supp}(f_s); s \in S\}$ je lokálne konečný.

Existencia rozkladu jednotky

Lema

Nech X je regulárny parakompaktný priestor. Potom pre každé otvorené pokrytie $\{U_i; i \in I\}$ priestoru X existuje lokálne konečné uzavreté zjemnenie $\{F_i; i \in I\}$ také, že pre všetky $i \in I$ platí $F_i \subseteq U_i$.

T.j. máme zjemnenie *s tou istou indexovou množinou* ako pôvodné pokrytie.

Existencia rozkladu jednotky

Veta

Nech X je T_3-priestor. X je parakompaktný práve vtedy, keď pre každé otvorené pokrytie $\mathcal{U}$ priestoru X existuje lokálne konečný rozklad jednotky taký, že

$$\{\mathrm{supp}(f_s); s \in S\} \prec \mathcal{U}$$