Všeobecná topológia – sada úloh č. 1

Každá z uvedených úloh má hodnotu 20 bodov. Rozumné je každú z nich začať na novej strane.

Úloha 1. Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, a nech $\mathcal{B}_X$ je báza topológie $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{B}_Y$ je topológie $\mathcal{T}_Y$.

Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je spojité práve vtedy, keď:
a) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ platí $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$.
b) Pre každé $V \in \mathcal{T}_Y$ a $x \in X$ také, že $f(x) \in V$ existuje $U \in \mathcal{T}_X$ také, že $x \in U$ a $f[U] \subseteq V$.

Zistite, či tieto ekvivalencie zostanú v platnosti ak všade namiesto $\mathcal{T}$ napíšeme $\mathcal{B}$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)

Úloha 2. Nech $(D, \leq_1)$ a $(E, \leq_2)$ sú nahor usmernené množiny. Na množine $D \times E$ definujme reláciu

$$(d_1, e_1) \leq (d_2, e_2) \Leftrightarrow (d_1 \leq_1 e_1) \wedge (d_2 \leq_2 e_2).$$

T.j. usporiadaná dvojice porovnávame tak, že nerovnosť platí na oboch súradniciach.

Dokážte, že $(D \times E, \leq)$ je nahor usmernená množina.

Úloha 3. Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$ je filter na X. Dokážte, že $\{(b, F); b \in F \in \mathcal{F}\}$ s reláciou

$$(b_1, F_1) \leq (b_2, F_2) \Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2$$

je nahor usmernená množina.

Ak na tejto nahor usmernenej množine definujeme sieť

$$x_{(b,F)} = b,$$

tak pre $a \in X$ platí:
a) Táto sieť konverguje k a práve vtedy, keď $\mathcal{F} \to a$.
b) Bod a je hromadný bod tejto siete práve vtedy, keď a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$.

Úloha 4. Ukážte, že ak priestor X spĺňa Urysohnovu lemu, tak je normálny.

T.j. chceme ukázať, že X je normálny, ak vieme, že pre ľubovoľné disjunktné uzavreté podmnožiny A, B tohto priestoru existuje spojitá funkcia $f\colon X \to \langle 0, 1\rangle$ taká, že

$$A \subseteq f^{-1}[\{0\}] \qquad \text{a} \qquad B \subseteq f^{-1}[\{1\}].$$

Úloha 5. Nech $X = \{0, 1\}^\omega$ je súčin spočítateľne veľa kópií diskrétneho dvojprvkového priestoru a nech $I = \langle 0, 1\rangle$ je uzavretý jednotkový interval s obvyklou topológiou. Položme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

a) Ukážte, že uvedený predpis priradí každému $x \in X$ práve jeden prvok $\phi(x) \in I$, teda naozaj dostávame zobrazenie $\varphi\colon X \to I$.
b) Ukážte, že zobrazenie φ je spojité.
c) Ukážte, že zobrazenie φ je surjektívne. Je toto zobrazenie aj injektívne?
d) Dajú sa veci dokázané v predchádzajúcich častiach využiť na dôkaz kompaktnosti priestoru $I = \langle 0, 1\rangle$?