Binárne operácie

26. septembra 2023

Plán úvodnej časti semestra

- Definovať pojem grupy.
- Definovať pojem poľa.
- Využijeme ich pri definícii **vektorového priestoru** – to je náš hlavný objekt záujmu.

Definícia binárnej operácie

Definícia

Binárna operácia $*$ na množine A je zobrazenie z množiny $A \times A$ do A.
Namiesto $*(a, b)$ budeme používať označenie $a * b$, tento zápis budeme niekedy skracovať ako ab.

Príklady binárnych operácií

$$a \odot b = (a + b) \bmod 5$$

$$a \odot b = (a \cdot b) \bmod 5$$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Príklady binárnych operácií

$\triangle$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	2
2	0	2	1

$$a \lhd b = a$$

Neutrálny prvok

	LN	PN	K	A	IP
$(\mathbb{R}, +)$					
$(\mathbb{R}, \cdot)$					
$(\mathbb{Z}_5, \oplus)$					
$(\mathbb{Z}_3, \triangle)$					
$(\mathbb{N}, \triangleleft)$					

Neutrálny prvok

Definícia

Nech $*$ je binárna operácia na množine M. Hovoríme, že $e \in M$ je *ľavý neutrálny prvok* operácie $*$, ak pre všetky $m \in M$ platí

$$e * m = m.$$

Podobne, e je *pravý neutrálny prvok*, ak

$$m * e = m$$

pre každé $m \in M$.
Ak e je súčasne ľavý aj pravý neutrálny prvok operácie $*$, hovoríme, že e je *neutrálny prvok.*

Neutrálny prvok

	LN	PN	K	A	IP
$(\mathbb{R}, +)$	0	0			
$(\mathbb{R}, \cdot)$	1	1			
$(\mathbb{Z}_5, \oplus)$	0	0			
$(\mathbb{Z}_3, \triangle)$	0,1	x			
$(\mathbb{N}, \triangleleft)$	x	$\checkmark$			

Neutrálny prvok

Tvrdenie

Nech $*$ je binárna operácia na množine M. Ak e_1 je jej ľavý neutrálny a e_2 je jej pravý neutrálny prvok, tak $e_1 = e_2$. Špeciálne, ak má binárna operácia $*$ na množine M neutrálny prvok, tak tento neutrálny prvok je jediný.

$$e_1 \stackrel{(1)}{=} e_1 * e_2 \stackrel{(2)}{=} e_2$$

Komutatívnosť

Definícia

Binárna operácia $*$ na množine M je *komutatívna*, ak pre všetky $x, y \in M$ platí

$$x * y = y * x.$$

Komutatívnosť

	LN	PN	K	A	IP
$(\mathbb{R},+)$	0	0	✓		
$(\mathbb{R},\cdot)$	1	1	✓		
$(\mathbb{Z}_5,\oplus)$	0	0	✓		
$(\mathbb{Z}_3,\triangle)$	0,1	x	x		
$(\mathbb{N},\lhd)$	x	✓	x		

Komutatívnosť

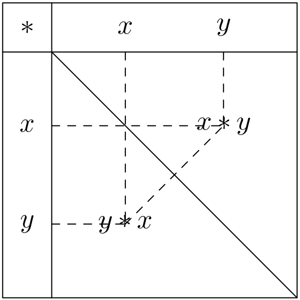

Figure: Komutatívnosť a tabuľka binárnej operácie

Komutatívnosť

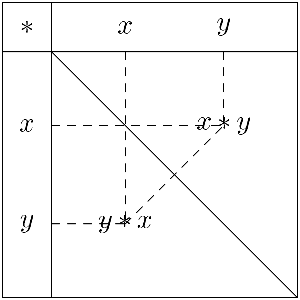

Figure: Komutatívnosť a tabuľka binárnej operácie

Asociatívnosť

Definícia

Binárna operácia $*$ na množine M je *asociatívna,* ak pre všetky $x, y, z \in M$ platí

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

$$\begin{array}{ccccccc} (& x & * & y &) & * & z \\ x & * & (& y & * & z &) \end{array}$$

Asociatívnosť

- Nezáleží na uzátvorkovaní.

$$x * y * z = (x * y) * z = x * (y * z)$$

- Funguje to aj pre viac prvkov.

$$(a * b) * (c * d) = (a * (b * c)) * d$$

Asociatívnosť

	LN	PN	K	A	IP
$(\mathbb{R}, +)$	0	0	✓	✓	
$(\mathbb{R}, \cdot)$	1	1	✓	✓	
$(\mathbb{Z}_5, \oplus)$	0	0	✓	✓	
$(\mathbb{Z}_3, \triangle)$	0,1	x	x	x	
$(\mathbb{N}, \triangleleft)$	x	✓	x	✓	

Zovšeobecnený asociatívny zákon

Tvrdenie (Zovšeobecnený asociatívny zákon)

Nech $\cdot$ je asociatívna binárna operácia na množine A. Potom súčin $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ nezávisí od spôsobu uzátvorkovania.

Zovšeobecnený asociatívny zákon

$$a \circ ((b \circ c) \circ d)$$
$$a \circ (b \circ (c \circ d))$$
$$(a \circ b) \circ (c \circ d)$$
$$((a \circ b) \circ c) \circ d$$
$$(a \circ (b \circ c)) \circ d$$

Inverzný prvok

Definícia

Nech $*$ je binárna operácia na množine M. Nech $a \in M$ a nech e je neutrálny prvok operácie $*$. Prvok $b \in M$ je *inverzný* k prvku a, ak platí

$$a * b = b * a = e.$$

V prípade, že platí $a * b = e$, b nazývame *pravý inverzný prvok* k a. Ak $b * a = e$, tak b je *ľavý inverzný prvok* k b.

Inverzný prvok

	LN	PN	K	A	IP
$(\mathbb{R}, +)$	0	0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$(\mathbb{R}, \cdot)$	1	1	$\checkmark$	$\checkmark$	x
$(\mathbb{Z}_5, \oplus)$	0	0	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$(\mathbb{Z}_3, \triangle)$	0,1	x	x	x	x
$(\mathbb{N}, \triangleleft)$	x	$\checkmark$	x	$\checkmark$	x

Inverzný prvok

Tvrdenie

Nech $*$ je asociatívna operácia na množine M a $*$ má neutrálny prvok e. Ak existuje inverzný prvok k a, tak je jednoznačne určený.

$$b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2$$
$$b_1 * e = e * b_2$$
$$b_1 = b_2$$