Grupy

26. septembra 2023

Definícia

Definícia

Dvojica $(G, *)$, kde G je množina a $*$ je binárna operácia na G, sa nazýva *grupa*, ak

(i) operácia $*$ je asociatívna,

(ii) operácia $*$ má neutrálny prvok, (neutrálny prvok budeme spravidla označovať e)

(iii) ku každému prvku $g \in G$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $*$. (Tento inverzný prvok budeme označovať g^{-1}.)

$$(\forall a, b, c \in G)(a * b) * c = a * (b * c)$$
$$(\exists e \in G)(\forall a \in G) a * e = e * a = a$$
$$(\forall a \in G)(\exists b \in G) a * b = b * a = e$$

Komutatívna grupa

Definícia

Grupa $(G, *)$ sa nazýva *komutatívna*, ak operácia $*$ na G je komutatívna. (Tiež sa používa termín *abelovská grupa*.)

Existujú aj nekomutatívne grupy – príklady na cvičeniach resp. v texte:

- Permutácie: $(S_3, \circ)$ resp. $(S_n, \circ)$ pre $n \geq 3$.
- Množina všetkých bijekcií $M \to M$ s operáciou skladania pre $|M| \geq 2$.

Príklady grúp

- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$

Zákony o krátení

Veta (Zákony o krátení)

Ak $(G, *)$ *je grupa, tak pre ľubovoľné* $a, b, c \in G$ *platí*

$$
\begin{aligned}
a * b = a * c \quad &\Rightarrow \quad b = c \\
b * a = c * a \quad &\Rightarrow \quad b = c
\end{aligned}
$$

Zákony o krátení

$$a * b = a * c \quad \Rightarrow \quad b = c$$
$$b * a = c * a \quad \Rightarrow \quad b = c$$

$$b \neq c \quad \Rightarrow \quad a * b \neq a * c$$
$$b \neq c \quad \Rightarrow \quad b * a \neq c * a$$

Ako sa prejavia v tabuľke?

Vlastnosti inverzov

Veta

Nech $(G, *)$ *je grupa. Potom pre ľubovoľné* $a, b \in G$ *platí*

$$(a^{-1})^{-1} = a$$
$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Vlastnosti inverzov

Pripomeňme podobný výsledok o inverzných funkciách:

Tvrdenie

Nech $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ sú bijekcie. Potom

$$(f^{-1})^{-1} = f$$
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$