Vektorové priestory

3. októbra 2023

Definícia vektorového priestoru

Definícia

Nech F je pole a $V \neq \emptyset$ je množina. Nech $+$ je binárna operácia na V a každej dvojici $c \in F$, $\vec{\alpha} \in V$ je priradený prvok $c \cdot \vec{\alpha} \in V$, pričom platí pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$:

(i) $(V, +)$ je komutatívna grupa,

(ii) $c \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c \cdot \vec{\alpha} + c \cdot \vec{\beta}$,

(iii) $(c + d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot \vec{\alpha} + d \cdot \vec{\alpha}$,

(iv) $(c \cdot d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot (d \cdot \vec{\alpha})$,

(v) $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* nad poľom F.

Definícia vektorového priestoru

- Prvky z V voláme *vektory* a spravidla označujeme zvyčajne so šípkou.
- Prvky poľa F voláme *skaláry.*
- Rovnaké označenie $+$ aj $\cdot$ pre operácie vo V aj v F; z kontextu by malo byť jasné, ktorú z nich máme na mysli.
- V grupe $(V,+)$ označujeme neutrálny prvok ako $\vec{0}$ a inverzný prvok ako $-\vec{\alpha}$.
- Označenie: $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$

Príklady

Príklad

Vektory v rovine so sčitovaním a násobením ako ho poznáte zo strednej školy, tvoria vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

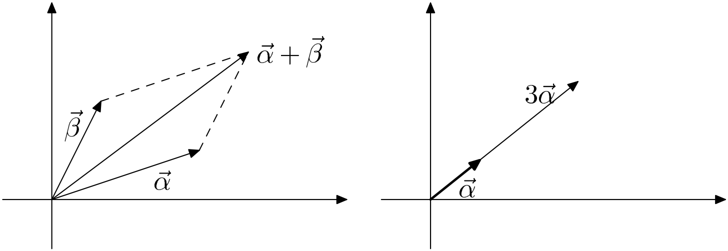

Figure: Operácie s vektormi v rovine

Priestor $\mathbb{R}^n$

Sčitovanie aj násobenie skalárom definujeme po súradniciach:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2 \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \dots, x_n + y_n)$$
$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2 \dots, cx_n)$$

Príklady

- Vektory v rovine – vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.
- Usporiadané n-tice: $\mathbb{R}^n$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.
- Usporiadané n-tice: F^n je vektorový priestor nad F.

Funkcie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Príklad

Nech $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, teda V je množina všetkých zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Túto množinu budeme obvykle označovať ako $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x),$$

Funkcie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

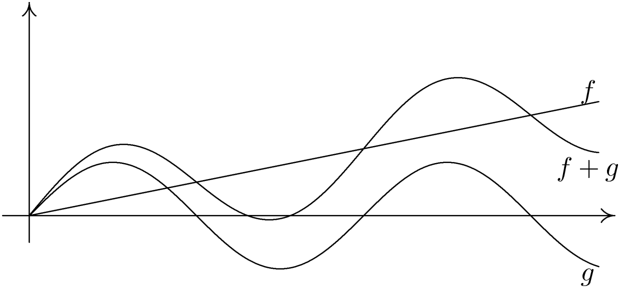

Figure: Operácie v priestore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Funkcie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

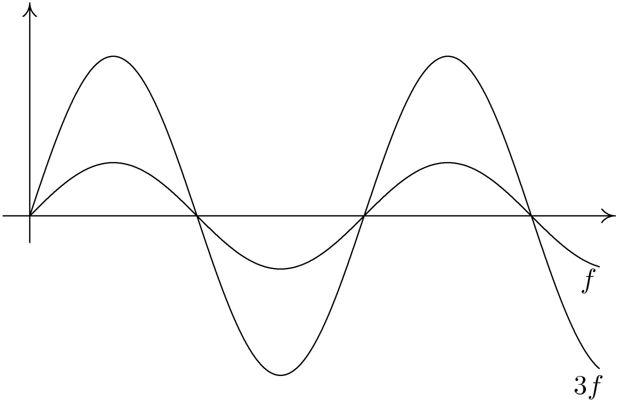

Figure: Operácie v priestore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Príklady

Analogicky ako $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vieme dostať vektorový priestor F^n resp. F^M. (Kde F je nejaké pole a M je nejaká množina.)

Základné vlastnosti

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F, $c \in F$ a $\vec{\alpha} \in V$.

(a) $0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$,

(b) $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$,

(c) $c \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ *práve vtedy, keď* $c = 0$ *alebo* $\vec{\alpha} = \vec{0}$,

(d) $(-c) \cdot \vec{\alpha} = -c \cdot \vec{\alpha}$.