Podpriestory

10. októbra 2023

Definícia podpriestoru

Definícia

Ak V je vektorový priestor nad poľom F, $S \neq \emptyset$ a $S \subseteq V$, tak S nazveme *podpriestorom* (alebo tiež *vektorovým podpriestorom*) priestoru V, ak

(i) pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$,

(ii) pre ľubovoľné $\vec{\alpha} \in S$ a $c \in F$ platí $c\vec{\alpha} \in S$.

Inými slovami, podpriestor vektorového priestoru V je taká podmnožina S, ktorá je uzavretá vzhľadom sčitovanie aj vzhľadom na násobenie skalárom.

Podpriestor obsahuje $\vec{0}$

Každý podpriestor S priestoru V musí obsahovať nulový vektor $\vec{0}$.

$$\vec{\alpha} \in S \qquad \Rightarrow \qquad \vec{0} = 0 \cdot \vec{\alpha} \in S$$

$$\vec{0} \in S$$

Príklady podpriestorov

- priamka v rovine;
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ v $\mathbb{R}^3$
- $\{\vec{0}\}$ a V sú podpriestory vo V.

Príklady podpriestorov

V $\mathbb{R}^2$:

- $\{\vec{0}\}$ (jediný bod);
- priamky prechádzajúce cez $(0,0)$;
- $V = \mathbb{R}^2$ (celý priestor);
- Neskôr si dokážeme, že $\mathbb{R}^2$ žiadne iné podpriestory nemá.

Príklady podpriestorov

V $\mathbb{R}^3$:

- $\{\vec{0}\}$ (jediný bod);
- priamky prechádzajúce cez $(0, 0, 0)$;
- roviny prechádzajúce cez $(0, 0, 0)$;
- $V = \mathbb{R}^3$ (celý priestor);
- Neskôr si dokážeme, že $\mathbb{R}^3$ žiadne iné podpriestory nemá.

Podpriestor je vektorový priestor

- Výsledky operácií ležia v S.
- Neutrálny prvok $\vec{0} \in S$.
- Inverzný prvok: $\vec{\alpha} \in S \Rightarrow -\vec{\alpha} \in S$.
- Ďalšie vlastnosti sa dedia z väčšej množiny V na podmnožinu S.

Podpriestor je vektorový priestor

- Neskôr: Zavediem pojem dimenzie pre vektorové priestory.
- Inuitívne je jasné, že priamka je 1-rozmerná, rovina je 2-rozmerná.
- Neskôr: Súvis podpriestorov so sústavami. Tu sme mali sústavu obsahujúcu jedinú rovnicu $x + y + z = 0$.

Podpriestor je vektorový priestor

$$(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in V)\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$$

$$(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V)\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$(\forall c \in F)(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V)c \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c \cdot \vec{\alpha} + c \cdot \vec{\beta}$$

$$(\forall c, d \in F)(\forall \vec{\alpha} \in V)(c + d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot \vec{\alpha} + d \cdot \vec{\alpha}$$

$$(\forall c, d \in F)(\forall \vec{\alpha} \in V)(c \cdot d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot (d \cdot \vec{\alpha})$$

$$(\forall \vec{\alpha} \in V)1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$$

Podpriestor je vektorový priestor

$$(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in S) \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$$

$$(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S) \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$(\forall c \in F)(\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S) c \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = c \cdot \vec{\alpha} + c \cdot \vec{\beta}$$

$$(\forall c, d \in F)(\forall \vec{\alpha} \in S)(c + d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot \vec{\alpha} + d \cdot \vec{\alpha}$$

$$(\forall c, d \in F)(\forall \vec{\alpha} \in S)(c \cdot d) \cdot \vec{\alpha} = c \cdot (d \cdot \vec{\alpha})$$

$$(\forall \vec{\alpha} \in S) 1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$$

Kritérium vektorového podpriestoru

Tvrdenie (Kritérium vektorového podpriestoru)

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Potom S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c, d \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ platí

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \qquad \Rightarrow \qquad c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S. \tag{1}$$

Ekvivalentné podmienky pre podpriestor

Predpokladáme, že S je neprázdna podmnožina V.

- Definícia – t.j. uzavretosť na súčet a násobenie skalárom
- $c, d \in F, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \Rightarrow c\vec{\alpha} + d\vec{\beta} \in S$
- $c \in F, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \Rightarrow c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$

Prienik podpriestorov

Veta

Ak S a T sú podpriestory vektorového priestoru V, tak aj $S \cap T$ je podpriestor V.

Dôsledok

Nech $n \in \mathbb{N}$. Ak $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sú podpriestory priestoru V, tak aj $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ je podpriestor priestoru V.

Prienik podpriestorov

Veta

Nech $I \neq \emptyset$ je ľubovoľná neprázdna množina a S_i je podpriestor priestoru V pre každé $i \in I$. Potom aj $\bigcap_{i \in I} S_i$ je podpriestor priestoru V.

Definícia prieniku

Nech $I \neq \emptyset$, pre každé $i \in I$ je S_i nejaká množina.

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \{x; (\forall i \in I) x \in S_i\}$$

Napríklad pre podmnožiny $\mathbb{R}$:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (n, \infty) = ?$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}) = ?$$

Definícia prieniku

Nech $I \neq \emptyset$, pre každé $i \in I$ je S_i nejaká množina.

$$\bigcap_{i\in I} S_i = \{x; (\forall i \in I) x \in S_i\}$$

Napríklad pre podmnožiny $\mathbb{R}$:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} (n, \infty) = \emptyset$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) = \{0\}$$

Analógia s označením pre súčet a súčin

$x + y$	$A \cup B$	$x \cdot y$	$A \cap B$
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$	$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$	$\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$	$\bigcap\limits_{i\in I} A_i$
$\sum\limits_{i=0}^{n} x_i$	$\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i$	$\prod\limits_{i=0}^{n} x_i$	$\bigcap\limits_{i=0}^{n} A_i$
$\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i$	$\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$	$\prod\limits_{i=0}^{\infty} x_i$	$\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} A_i$