Báza a dimenzia

17. októbra 2023

Konečnorozmerný priestor

Definícia

Nech V je vektorový priestor. Hovoríme, že V je *konečnorozmerný* ak existuje taká konečná množina vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$, že platí $[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = V$.

Inými slovami: konečnorozmerný vektorový priestor je priestor, ktorý je generovaný nejakou konečnou množinou vektorov.

Definícia bázy

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Množinu vektorov $\{\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n\}$ nazývame *bázou* priestoru V, ak

(i) vektory $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé,

(ii) $V = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n]$.

(Stručne: Báza je taká množina lineárne nezávislých vektorov, ktorágeneruje celý priestor.)

Nulový priestor

$V = \{\vec{0}\}$

- Nemáme tu žiaden lineárne nezávislý vektor.
- Takže nenájdeme ani bázu, v ktorej by bol aspoň jeden vektor.
- Mohli by sme zobrať bázu s 0 vektormi – pre jednoduchosť sa takýmto prípadom nebudeme zaoberať.

Štandardná báza

Príklad

Ako $\vec{\varepsilon}_i$ označíme vektor, ktorý má na všetkých súradniciach 0, iba na i-tej súradnici 1, teda

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \vec{\varepsilon}_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots \\ \vec{\varepsilon}_n &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Vektory $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ tvoria bázu vektorového priestoru F^n. Túto bázu nazývame *štandardná báza* F^n.

Dimenzia

Veta

Ľubovoľné dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V majú rovnaký počet prvkov.

Veta (Steinitzova veta o výmene)

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Ak $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$ (vektorový priestor V je generovaný vektormi $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$) a $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s \in V$ sú lineárne nezávislé vektory, tak

(i) $s \leq n$,

(ii) *z vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sa dá vybrať $n - s$ vektorov, ktoré spolu s vektormi $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_s$ generujú V.*

Dimenzia

Veta

Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Ak $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_s \in V$ sú lineárne nezávislé, tak sa dajú doplniť na bázu priestoru V.

Dôsledok

Každý konečnorozmerný vektorový priestor $V \neq \{\vec{0}\}$ má bázu.

Dimenzia

Definícia

Dimenziou konečnorozmerného vektorového priestoru V nazývame počet prvkov ľubovoľnej jeho bázy. (Pre nulový priestor dodefinujeme $d(\{\vec{0}\}) = 0$.) Toto číslo označujeme $d(V)$.

$d(F^n) = n$

Dimenzia

Dôsledok

Ak V je konečnorozmený vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ sú lineárne nezávislé vo V, tak $n \leq d(V)$.

Príklad

Vektory $(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$ sú lineárne závislé v $\mathbb{R}^3$.

Ekvivalentné podmienky pre bázu

Veta

Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor a $d(V) = n$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ *je báza priestoru* V,

(ii) *vektory* $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ *sú lineárne nezávislé,*

(iii) $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

Ak mám „správny“ počet vektorov, môžeme jednu z podmienok vystupujúcich v definícii vynechať.

Ekvivalentné podmienky pre bázu

Veta

Nech V je vektorový priestor. Vektory $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ tvoria bázu priestoru V práve vtedy, keď každý vektor $\vec{\beta}$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako

$$\vec{\beta} = c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Dimenzia a podpriestory

Veta

Ľubovoľný podpriestor S konečnorozmerného priestoru V je konečnorozmerný. Navyše, $d(S) \leq d(V)$.

Tvrdenie

Ak S je podpriestor konečnorozmerného vektorového priestoru V a $d(S) = d(V)$, tak $S = V$.