Matice

31. októbra 2023

Definícia matice

Definícia

Maticou typu $m \times n$ nad poľom F nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa F, ktorá má m riadkov a n stĺpcov.

Matice zapisujeme v tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

pričom a_{ij} označuje prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Definícia matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Iný zápis: $||a_{ij}||$

Príklad

Príklad

$\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ je matica typu 2×3 nad $\mathbb{R}$.

Súčet a skalárny násobok

Definícia

Nech A, B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F a $c \in F$.

(a) *Súčet matíc* $A = ||a_{ij}||$ a $B = ||b_{ij}||$ je matica $A + B = ||a_{ij} + b_{ij}||$.

(b) Matica $c \cdot A = ||ca_{ij}||$ sa nazýva *c-násobok* matice A.

(Teda sčitovanie matíc a násobenie matice skalárom definujeme po súradniciach.)

Všimnime si, že súčet matíc definujeme len pre matice rovnakého typu.

Súčet a skalárny násobok

Príklad

Uvažujme matice typu 2×2 nad $\mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Priestor matíc typu $m \times n$ nad F

Veta

Matice typu $m \times n$ nad poľom F s takto definovaným sčitovaním a násobením skalármi tvoria vektorový priestor nad poľom F.

Štvorcová matica

Definícia

Maticu typu $n \times n$ (teda takú, ktorá má rovnaký počet riadkov a stĺpcov) nazývame *štvorcová matica.*
Maticu

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

typu $n \times n$, ktorá má na diagonále jednotky a mimo diagonály nuly, nazývame *jednotková matica.*

Diagonálna matica

Definícia

Štvorcová matica, ktorá má mimo diagonály iba nuly (t.j. $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$) sa nazýva *diagonálna matica.* (Príkladom diagonálnej matice je jednotková matica.)

Príklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kroneckerov symbol

Poznámka

Jednotkovú maticu by sme mohli definovať ako $I = ||\delta_{ij}||$, kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j, \\ 0 & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

Takto definovaný symbol sa v matematike často používa, nazýva sa *Kroneckerov symbol.*

Transponovaná matica

Definícia

Transponovaná matica k matici A typu $m \times n$ je matica A^T typu $n \times m$ určená ako
$$A^T = ||a_{ji}||.$$

Štvorcová matica A sa nazýva *symetrická*, ak $A = A^T$ a *antisymetrická*, ak $A = -A^T$.

Teda A^T je vlastne matica A prevrátená symetricky podľa hlavnej diagonály.

Transponovaná matica

- $I^T = I$,
- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = cA^T$

Transponovaná matica

Príklad

Ak $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, tak $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú symetrické, matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sú antisymetrické.