Riadková ekvivalencia a hodnosť matice

6. novembra 2023

Definícia matice

Definícia

Maticou typu $m \times n$ nad poľom F nazývame ľubovoľnú tabuľku pozostávajúcu z prvkov poľa F, ktorá má m riadkov a n stĺpcov.

Matice zapisujeme v tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

pričom a_{ij} označuje prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Podpriestor V_A

Definícia

Podpriestorom prislúchajúcim matici A typu $m \times n$ nad poľom F nazývame podpriestor priestoru F^n generovaný riadkami matice A. Označujeme ho V_A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad V_A = [(1,0,1),(0,1,1)]$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V_I = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \mathbb{R}^3$$

Elementárne riadkové operácie

Definícia

Elementárne riadkové operácie na matici A nad poľom F sú:

1. výmena 2 riadkov matice,
2. vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F,
3. pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Hovoríme, že matice A a B sú *riadkovo ekvivalentné,* ak maticu B možno z A dostať pomocou konečnej postupnosti elementárnych riadkových operácií. Ak matice A a B sú riadkovo ekvivalentné, zapisujeme to ako $A \sim B$.

Elementárne riadkové operácie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementárne riadkové operácie

- Ak $A \sim B$ a $B \sim C$, tak $A \sim C$.
- Riadkové operácie sa dajú obrátiť: Ak $A \sim B$, tak $B \sim A$. (Tu je dôležité, že $c \neq 0$ a teda existuje c^{-1}.)
- Je to *relácia ekvivalencie* na množine $M_{m,n}(F)$.

Elementárne riadkové operácie

Veta

Elementárne riadkové operácie nemenia podpriestor prislúchajúci danej matici. (Teda riadkovo ekvivalentným maticiam zodpovedá rovnaký podpriestor.)

- Výmena poradia nemení lineárny obal.
- Vynásobenie *nenulovým* skalárom:
  $V_B = [c\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m] \stackrel{?}{=} [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n]$.
- Pripočítanie násobku:
  $V_B = [\vec{\alpha}_1 + c\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m] \stackrel{?}{=} [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n]$.

Redukovaná trojuholníková matica

Definícia

Matica A je *redukovaná trojuholníková matica*, ak:

(i) Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.

(ii) Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.

(iii) Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami. (Presnejšie povedané: Akýkoľvek nulový riadok musí byť nižšie ako akýkoľvek nenulový riadok.)

(iv) Vedúci prvok ľubovoľného nenulového riadku je napravo od vedúcich prvkov všetkých nenulových riadkov nad ním a naľavo od vedúcich prvkov riadkov pod ním (t.j. vedúce riadky sú usporiadané zľava doprava).

Redukovaná trojuholníková matica

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Podobnosť s RTM

Veta

Každá matica nad poľom F je riadkovo ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou.

Podobnosť s RTM

Prvý nenulový stĺpec:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1s} & * & * & * & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{ks} \neq 0 & * & * & * & a_{ks} \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,s} & * & * & * & a_{ns} \end{pmatrix}$$

Podobnosť s RTM

Po výmene riadkov:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1s} \neq 0 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Podobnosť s RTM

Vynásobíme b_{1s}^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{2s} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{ks} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,s} & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Podobnosť s RTM

Vynulujeme ostatné prvky v s-tom stĺpci (pripočítaním vhodného násobku prvého riadku).

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2,s+1} & \dots & \dots & c_{2,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{k,s+1} & \dots & \dots & c_{k,n} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{m+1,s+1} & \dots & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

Podobnosť s RTM

Použijeme indukčný predpoklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podobnosť s RTM

Treba ešte upraviť prvý riadok:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

Veta

Nenulové riadky redukovanej trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé.

Hodnosť matice

Definícia

Hodnosť matice A je dimenzia podpriestoru V_A prislúchajúceho tejto matici. Označujeme ju $h(A)$.

$$h(A) = d(V_A)$$

- Ak $A \sim B$, tak $h(A) = h(B)$; pretože $V_A = V_B$.
- Ak A je RTM, tak hodnosť je rovná počtu nenulových riadkov.

Ktoré vektory patria do V_A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_A = V_B = [(1,0,2),(0,1,\frac{3}{2})]$$

Ako zistiť, či $\vec{\alpha} = (1,4,4) \in V_A$?

Ktoré vektory patria do V_A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_A = V_B = [(1,0,2),(0,1,\frac{3}{2})]$$

Ako zistiť, či $\vec{\alpha} = (1,4,4) \in V_A$?

$$(1,4,4) = c_1(1,0,2) + c_2(0,1,\frac{3}{2}) = (c_1, c_2, 2c_1 + \frac{3}{2}c_2).$$

Ktoré vektory patria do V_A?

Lema

Nech A je redukovaná trojuholníková matica typu $m \times n$ nad poľom F. Označme jej nenulové riadky $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$ a ako $i_1, \dots, i_k$ označme čísla stĺpcov, v ktorých sú vedúce jednotky. Potom $\vec{\alpha} = (c_1, \dots, c_n) \in V_A$ práve vtedy, keď $\vec{\alpha} = c_{i_1}\vec{\alpha}_1 + c_{i_2}\vec{\alpha}_2 + \dots + c_{i_k}\vec{\alpha}_k$.

Riadková ekvivalencia a RTM

Veta

Ak A a B sú redukované trojuholníkové matice rovnakého typu $m \times n$ nad poľom F a $V_A = V_B$, tak $A = B$.

- $h(A) = h(B)$, teda majú rovnaký počet nenulových riadkov;
- rovnaké pozície vedúcich jednotiek;
- rovnaké riadky.

Riadková ekvivalencia a RTM

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{25} \end{pmatrix}$$

Keby $V_A = V_B$, tak $(0,0,1,1,2) \in V_B$ a muselo by platiť

$$(0,0,1,1,2) = 0 \cdot (1, b_{12}, b_{13}, 0, b_{15}) + 1 \cdot (0,0,0,1,b_{25})$$
$$(0,0,1,1,2) = (0,0,0,1,b_{25})$$

Riadková ekvivalencia a RTM

Dôsledok

Nech A a B sú matice typu $m \times n$ nad poľom F. Nasledovné podmienky sú ekvivalentné:

(i) *A a B sú riadkovo ekvivalentné,*

(ii) $V_A = V_B$,

(iii) *A a B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou trojuholníkovou maticou.*