Lineárne zobrazenia

14. novembra 2023

Definícia lineárneho zobrazenia

Definícia

Ak V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \to W$ je zobrazenie z V do W, tak hovoríme, že f je *lineárne zobrazenie,* ak pre ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ a ľubovoľné $c \in F$ platí

(i) $f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$,

(ii) $f(c\vec{\alpha}) = cf(\vec{\alpha})$.

Príklady lineárnych zobrazení

- $id_V : V \to W$

$$id_V(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$$

- $f : V \to W$

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{0}$$

Otočenie v rovine

Príklad

Otočenie v rovine o 90° je lineárne zobrazenie.

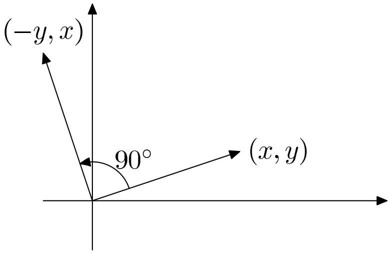

Figure: Otočenie v rovine o 90°

$$f(x, y) = (-y, x)$$

Otočenie v rovine

$$f(x,y) = (-y,x)$$

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(x',y') &= (-y,x) + (-y',x') \\ &= (-(y+y'), x+x') = f(x+x', y+y'), \end{aligned}$$

$$f(cx,cy) = (-cy,cx) = c(-y,x) = cf(x,y).$$

Príklady lineárnych zobrazení

Príklad

Zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené predpisom

$$f(x,y) = (2x+y, x+3y)$$

je lineárne zobrazenie.

$$\begin{aligned} f(x,y)+f(x',y') &= (2x+y, x+3y)+(2x'+y', x'+3y') = \\ &(2(x+x')+y+y', x+x'+3(y+y')) = f(x+x', y+y'), \end{aligned}$$

$$f(cx,cy) = (2cx+cy, cx+3cy) = c(2x+y, x+3y) = cf(x,y).$$

Príklady lineárnych zobrazení

$$f(x, y) = (2x + y, x + 3y)$$

Pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c, d predpis

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

určuje lineárne zobrazenie.

Ekvivalentné charakterizácie

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(a) *zobrazenie f je lineárne,*

(b) $f(c\vec{\alpha} + d\vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + df(\vec{\beta})$ *pre ľubovoľné $c, d \in F$ a ľubovoľné $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$,*

(c) $f(c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n) = c_1 f(\vec{\alpha}_1) + \ldots + c_n f(\vec{\alpha}_n)$ *pre ľubovoľné $c_1, \ldots, c_n \in F$, $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n \in V$.*

(d) $f(c\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = cf(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$ *pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$.*

Obraz nulového vektora

Tvrdenie

Ak f je lineárne zobrazenie, tak $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Základná veta o lineárnych zobrazeniach

Veta

Nech V, W sú vektorové priestory. Nech $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V a nech $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \in W$. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $f : V \to W$ také, že

$$f(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

T.j. lineárne zobrazenie je jednoznačne určené obrazmi bázových vektorov.

Matica lineárneho zobrazenia

Definícia

Nech F je pole. *Matica lineárneho zobrazenia* $f\colon F^m \to F^n$ je matica typu $m \times n$ ktorej k-ty riadok je vektor $f(\vec{\varepsilon}_k)$.

Maticu zobrazenia f budeme označovať A_f.

Matica lineárneho zobrazenia

Príklad

Lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané predpisom $f(x,y) = (2x+y, x+y, x+2y)$.

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = f(1,0) = (2,1,1)$$
$$f(\vec{\varepsilon}_2) = f(0,1) = (1,1,2)$$

Teda matica tohoto zobrazenia je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zloženie lineárnych zobrazení

Veta

Nech U, V, W sú vektorové priestory nad tým istým poľom F. Ak $f : U \to V$ a $g : V \to W$ sú lineárne zobrazenia, tak aj $g \circ f$ je lineárne zobrazenie.