Súčin matíc

28. novembra 2023

Zloženie dvoch lineárnych zobrazení

Ak máme dve lineárne zobrazenia:

$$f : F_m \to F_n$$
$$g : F_n \to F_k$$

Vieme vyjadriť maticu zloženého zobrazenia $g \circ f$ pomocou matíc A_f a A_g?

$$A_{g \circ f} = ?$$

Zloženie dvoch lineárnych zobrazení

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pre

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zloženie dvoch lineárnych zobrazení

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g(f(\vec{\delta}_1)) &= g(1,0,2) = g(\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_3) = g(\vec{\varepsilon}_1) + 2g(\vec{\varepsilon}_3) \\ &= (3,1) + 2\cdot(0,-1) = (3,-1) \\ g(f(\vec{\delta}_2)) &= g(2,1,1) = g(2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3) = 2g(\vec{\varepsilon}_1) + g(\vec{\varepsilon}_2) + g(\vec{\varepsilon}_3) \\ &= 2\cdot(3,1) + (1,1) + (0,-1) = (7,2) \end{aligned}$$

$$A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Zloženie dvoch lineárnych zobrazení

$$f\colon F^m \to F^n \qquad A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ typu } m \times n$$

$$g\colon F^n \to F^k \qquad A_g = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \text{ typu } n \times k$$

Opäť nech $\vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_m$ je štandardná báza F^m a $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ je štandardná báza F^n.

Zloženie dvoch lineárnych zobrazení

$$g(f(\vec{\delta}_i)) = g(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) =$$

$$g(a_{i1}\vec{\varepsilon}_1 + a_{i2}\vec{\varepsilon}_2 + \dots + a_{in}\vec{\varepsilon}_n) = g(a_{i1}\vec{\varepsilon}_1) + g(a_{i2}\vec{\varepsilon}_2) + \dots + g(a_{in}\vec{\varepsilon}_n) =$$

$$\begin{aligned} & a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}) + \\ & a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k}) + \\ & \vdots \\ & a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk}) = \end{aligned}$$

$$(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1}, a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \dots + a_{in}b_{n2}, \dots,$$

$$\dots, a_{ik}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})$$

Zloženie dvoch lineárnych zobrazení

$$g(f(\vec{\delta}_i)) = g(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) =$$
$$(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1}, a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2}, \ldots,$$
$$\ldots, a_{ik}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk})$$

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

Súčin matíc

Definícia

Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times k$ nad poľom F, tak maticu $C = ||c_{ij}||$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, k$, nazývame *súčin matíc* A a B. Označujeme ju AB alebo $A \cdot B$.

$$A_{g \circ f} = A_f \cdot A_g$$

POZOR na zmenu poradia!!!

Súčin matíc

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$$

- Vezmeme i-ty riadok matice A a j-ty stĺpec matice B, vynásobíme hodnoty na rovnakých súradniciach a takto získané hodnoty sčítame.
- Matice sa dajú násobiť iba ak prvá má rovnaký počet riadkov ako je počet stĺpcov druhej matice.
- Súčin matíc veľkostí $m \times n$ a $n \times k$ má rozmer $m \times k$.

$$m \times \boxed{n \quad n} \times k$$

Súčin matíc

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{1k} \end{array}\right)$$

Súčin matíc

Veta

Nech F je pole, $f\colon F^m \to F^n$ a $g\colon F^n \to F^k$ sú lineárne zobrazenia. Potom platí

$$A_{g\circ f} = A_f \cdot A_g$$

POZOR na zmenu poradia!!!

Súčin matíc

Príklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Súčin matíc

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Asociatívnosť násobenia

Dôsledok

Násobenie matíc je asociatívne, teda

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

pre ľubovoľné matice také, že ich možno násobiť v uvedenom poradí.

$$\begin{aligned} A_f \cdot (A_g \cdot A_h) &= A_f \cdot (A_{h \circ g}) = A_{(h \circ g) \circ f} = \\ &= A_{h \circ (g \circ f)} = A_{g \circ f} \cdot A_h = (A_f \cdot A_g) \cdot A_h \end{aligned}$$

Asociatívnosť násobenia

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} \sum_{u=1}^{k} b_{tu} c_{uj} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{u=1}^{k} a_{it} (b_{tu} c_{uj})$$

$$\sum_{u=1}^{k} \left(\sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tu} \right) c_{uj} = \sum_{u=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} (a_{it} b_{tu}) c_{uj}$$

Násobenie matíc nie je komutatívne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti násobenia matíc

Veta

Nech matice A, B, C nad poľom F majú také rozmery, že uvedené súčty a súčiny majú zmysel.

$$I_m A = A = A I_n$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)D = BD + CD$$

Vlastnosti násobenia matíc

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}(b_{tj} + c_{tj}) = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj} + \sum_{t=1}^{n} a_{it} c_{tj}$$

Obraz vektora

Pre lineárne zobrazenie $f\colon F^m \to F^n$ a vektor $\vec{\alpha} \in F^m$ platí:

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} A_f$$

Obraz vektora

$$f(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} A_f$$

$$\vec{\alpha} A = (a_1, \dots, a_m) \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m \end{pmatrix} = a_1 \vec{\alpha}_1 + \cdots + a_m \vec{\alpha}_m =$$

$$a_1 f(\vec{\varepsilon}_1) + \cdots + a_n f(\vec{\varepsilon}_n) = f(a_1 \vec{\varepsilon}_1 + \cdots + a_n \vec{\varepsilon}_n) = f(a_1, \dots, a_n) = f(\vec{\alpha}).$$

Obraz vektora

Každé lineárne zobrazenie $f\colon F^m \to F^n$ má tvar $f(\vec{x}) = \vec{x}A$ pre nejakú maticu $A \in M_{m,n}(F)$.

$$f(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})A = \vec{\alpha}A + \vec{\beta}A = f(\vec{\alpha}) + f(\vec{\beta})$$
$$f(c\vec{\alpha}) = (c\vec{\alpha})A = c(\vec{\alpha}A) = cf(\vec{\alpha})$$

Súčin a transponovaná matica

$$(AB)^T = B^T A^T$$