Inverzná matica

28. novembra 2023

Inverzné zobrazenie

$g\colon Y \to X$ je inverzné zobrazenie $f\colon X \to Y$, ak

$$g \circ f = id_X$$
$$f \circ g = id_Y$$

- Inverzné zobrazenie k f existuje $\Leftrightarrow$ f je bijekcia.
- Je jednoznačne určené.
- Inverzné zobrazenie označujeme f^{-1}.
- $(f^{-1})^{-1} = f$ a $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$

Inverzné zobrazenie

Veta

Ak $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie a existuje inverzné zobrazenie $f^{-1} : W \to V$, tak f^{-1} je lineárne zobrazenie.

Kedy existuje f^{-1}?

Lema

Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V.

(i) Zobrazenie f je injekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ sú lineárne nezávislé.

(ii) Zobrazenie f je surjekcia práve vtedy, keď $[f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)] = W$ (teda ak vektory $f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)$ generujú celý priestor W).

Kedy existuje f^{-1}?

Veta

Nech $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n$ je báza priestoru V. Zobrazenie f je bijekcia práve vtedy, keď vektory $f(\vec{\alpha}_1), \ldots, f(\vec{\alpha}_n)$ tvoria bázu vektorového priestoru W.

Dôsledok

Nech $f\colon F^n \to F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *f je bijekcia,*

(ii) *f je prosté,*

(iii) *f je surjektívne.*

Kedy existuje f^{-1}?

Dôsledok

Nech $f\colon F^n \to F^n$ je lineárne zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(a) *zobrazenie f je bijekcia,*

(b) *existuje inverzné zobrazenie f^{-1},*

(c) $h(A_f) = n$.

Inverzná matica

Definícia

Nech A je matica typu $n \times n$. Hovoríme, že matica B je *inverzná* k matici A, ak platí

$$AB = BA = I_n.$$

Označujeme ju $B =: A^{-1}$.

Inverzná matica je matica zobrazenia f_A^{-1}.

Stačí jedna z podmienok $AB = I$ a $BA = I$

Poznámka

Ak pre *štvorcové* matice A, B rovnakých rozmerov platí niektorá z rovností $AB = I$ alebo $BA = I$, tak už B musí byť inverzná matica k A.

$$f_B \circ f_A = id$$
$$f_A \circ f_B = id$$

Stačí jedna z podmienok $AB = I$ a $BA = I$

- Ak $AB = I$, tak $f_B \circ f_A = id$.
- Ak $f_B \colon F^n \to F^n$ je surjekcia, tak je to bijekcia.
- Potom $f_B = f_A^{-1}$ a $B = A^{-1}$.

- Ak $BA = I$, tak $f_A \circ f_B = id$.
- Ak $f_B \colon F^n \to F^n$ je injekcia, tak je to bijekcia.
- Potom $f_B = f_A^{-1}$ a $B = A^{-1}$.

Regulárna matica

Definícia

Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva *regulárna*, ak $h(A) = n$.

Veta

Nech A je matica typu $n \times n$. K matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď A je regulárna.

Inverzná matica k súčinu

Tvrdenie

Nech $A, B \in M_{n,n}(F)$ sú regulárne matice. Potom platí:

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Inverzná matica k súčinu

Porovnanie – grupy, zobrazenia, matice:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Izomorfizmus vektorových priestorov

Definícia

Bijektívne lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ nazývame *izomorfimus vektorových priestorov* V a W (alebo tiež *lineárny izomorfizmus*). Ak existuje bijektívne zobrazenie $f\colon V \to W$, hovoríme, že vektorové priestory V a W sú izomorfné. Fakt, že V a W sú izomorfné označujeme $V \cong W$.

Dôsledok

Ak V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $V \cong W$, tak $d(V) = d(W)$.

Izomorfizmus vektorových priestorov

- $V \cong W$ ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$.
- Izomorfné vektorové priestory = sú „v podstate rovnaké“.
- Rovnaké „až na pomenovanie vektorov“ – bijekcia f nám dáva „slovník“.
- Príklad, ktoré sme videli: $F^{mn} \cong M_{m,n}(F)$.

Izomorfizmus vektorových priestorov

Tvrdenie

Pre ľubovoľné vektorové priestory U, V, W platí:

(i) $U \cong U$

(ii) *Ak platí* $U \cong V$*, tak platí aj* $V \cong U$.

(iii) *Ak platí* $U \cong V$ *a* $V \cong W$*, tak platí aj* $V \cong W$.

Izomorfizmus vektorových priestorov

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $d(V) = n$. Potom V je izomorfný s priestorom F^n.

Dôsledok

Ak V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory také, že $d(V) = d(W)$ tak $V \cong W$.