Súčin a elementárne riadkové operácie

27. novembra 2023

ERO ako násobenie maticou

- Každá ERO sa dá zapísať ako násobenie vhodnou maticou **zľava**.
- T.j. ak B sme dostali z A pomocou jednej operácie, tak $B = EA$.
- Matica E je presne matica, ktorú dostaneme takouto operáciou z jednotkovej matice.

ERO ako násobenie maticou

Definícia

Pre ľubovoľnú elementárnu riadkovú operáciu na matici typu $m \times n$ nazveme *maticou elementárnej riadkovej operácie* maticu typu $m \times m$, ktorá vznikne vykonaním tejto operácie na jednotkovej matici I_m.

Tvrdenie

Ak matica B vznikne z matice A vykonaním nejakej elementárnej riadkovej operácie a E je matica tejto riadkovej operácie, tak $B = EA$.

ERO ako násobenie maticou

Príklad

- Výmena prvého a tretieho riadku.
- Pripočítaniu dvojnásobku druhého riadku k prvému.
- Vynásobeniu prvého riadku číslom 3.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ERO ako násobenie maticou

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Iný pohľad riadkovú ekvivalenciu

Úloha

Nech $A, B \in M_{m,n}(F)$. Dokážte: Matice A, B sú riadkovo ekvivalentné práve vtedy, keď existuje regulárna matica $R \in M_{m,m}(F)$ taká, že $B = RA$.

Úloha

Nech A je štvorcová matica (nad nejakým poľom F). Dokážte: Matica A je regulárna práve vtedy, keď A sa dá dostať ako súčin nejakých matíc elementárnych riadkových operácií. (T.j. $A = E_1 E_2 \dots E_k$, kde každá z matíc $E_1, E_2, \dots, E_k$ zodpovedá nejakej ERO.)

Iný pohľad na súčin

Násobenie maticou A **zľava**

- Robíme lineárne kombinácie riadkov matice B.
- Prvky matice A nám určujú koeficienty, ktoré máme použiť.
- T.j. i-ty riadok matice AB je:

$$a_{i1}\vec{b}_1 + a_{i2}\vec{b}_2 + \cdots + a_{in}\vec{b}_n.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\vec{b}_1 + \cdots + a_{1n}\vec{b}_n \\ \vdots \\ a_{m1}\vec{b}_1 + \cdots + a_{mn}\vec{b}_n \end{pmatrix}$$