Sústavy lineárnych rovníc

11. decembra 2023

Definícia

Definícia

Sústavou lineárnych rovníc rozumieme systém rovníc tvaru

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde $a_{ij}, c_i \in F$ pre všetky prípustné hodnoty indexov i a j.

Definícia

Definícia

Riešenie sústavy lineárnych rovníc je n-tica $(x_1, \ldots, x_n)$ ktorá spĺňa všetky uvedené rovnice. Ak existuje aspoň jedno riešenie sústavy lineárnych rovníc, hovoríme, že táto sústava je *riešiteľná.* Skaláry $c_1, \ldots, c_n$ nazývame *pravé strany,* a_{ij} sú *koeficienty* a x_i sú neznáme.

Matica sústavy

Maticu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývame *matica sústavy* (1).
Maticu

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

nazývame *rozšírená matica sústavy* (1).

Maticový zápis sústavy

$$A\vec{x}^T = \vec{c}^T$$

alebo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Skutočne, $(x_1, \dots, x_n)$ je riešením sústavy (1) práve vtedy, keď platí uvedená maticová rovnosť.

Sústavy a riadková ekvivalencia

Veta

Ak rozšírené matice dvoch sústav lineárnych rovníc sú riadkovo ekvivalentné, tak tieto dve sústavy majú rovnakú množinu riešení.

- Výmena riadkov = výmena rovníc.
- Vynásobenie riadku $c \neq 0$ je to isté, ako vynásobiť príslušnú rovnicu konštantou c.
- Súčet riadkov = súčet rovníc.
- Pripočítanie c-násobku i-teho riadku k j-temu je to isté ako pripočítať c-násobok i-tej rovnice k j-tej rovnici.

Homogénne sústavy

- Ak sú pravé strany nulové ($c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$), nazývame sústavu (1) *homogénna* sústava lineárnych rovníc.
- V prípade homogénnej sústavy je nulový vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ riešením.
- Toto riešenie nazývame *triviálne riešenie.*

Homogénne sústavy

Veta

Množina všetkých riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc tvorí podpriestor priestoru F^n.

Ak $A\vec{\alpha}^T = \vec{0}^T$ a $A\vec{\beta}^T = \vec{0}^T$, tak aj

$$A(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^T = A\vec{\alpha}^T + A\vec{\beta}^T = \vec{0}^T + \vec{0}^T = \vec{0}^T$$
$$A(c\vec{\alpha})^T = c(A\vec{\alpha})^T = c\vec{0}^T = \vec{0}$$

Homogénne sústavy

Predpokladajme, že vedúce jednotky sú v prvých r stĺpcoch:

$$\begin{aligned} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{1,n}x_n &= 0 \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{2,n}x_n &= 0 \\ &\ldots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,n}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Homogénne sústavy

Tieto riešenia vytvoria bázu:

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_{r+1} &= (-c_{1,r+1}, -c_{2,r+1}, \dots, -c_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0), \\
\vec{\gamma}_{r+2} &= (-c_{1,r+2}, -c_{2,r+2}, \dots, -c_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0), \\
&\dots \\
\vec{\gamma}_{n} &= (-c_{1,n}, -c_{2,n}, \dots, -c_{r,n}, 0, \dots, 0, 1).
\end{aligned} \tag{3}$$

Homogénne sústavy

Ak $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je riešením (2):

$$\begin{aligned}
b_1 + c_{1,r+1} b_{r+1} + c_{1,r+2} b_{r+2} + \ldots + c_{1,n} b_n &= 0 \\
b_2 + c_{2,r+1} b_{r+1} + c_{2,r+2} b_{r+2} + \ldots + c_{2,n} b_n &= 0 \\
\ldots \\
b_r + c_{r,r+1} b_{r+1} + c_{r,r+2} b_{r+2} + \ldots + c_{r,n} b_n &= 0
\end{aligned}$$

Homogénne sústavy

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -c_{1,r+1}b_{r+1} - c_{1,r+2}b_{r+2} - \ldots - c_{1,n}b_n \\
b_2 &= -c_{2,r+1}b_{r+1} - c_{2,r+2}b_{r+2} - \ldots - c_{2,n}b_n \\
&\vdots \\
b_r &= -c_{r,r+1}b_{r+1} - c_{r,r+2}b_{r+2} - \ldots - c_{r,n}b_n \\
b_{r+1} &= \qquad\quad b_{r+1} \\
b_{r+2} &= \qquad\qquad\qquad\quad b_{r+2} \\
&\vdots \\
b_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b_n
\end{aligned}
$$

Homogénne sústavy

$$\begin{aligned}
b_1 &= -c_{1,r+1}b_{r+1} - c_{1,r+2}b_{r+2} - \ldots - c_{1,n}b_n \\
b_2 &= -c_{2,r+1}b_{r+1} - c_{2,r+2}b_{r+2} - \ldots - c_{2,n}b_n \\
&\vdots \\
b_r &= -c_{r,r+1}b_{r+1} - c_{r,r+2}b_{r+2} - \ldots - c_{r,n}b_n \\
b_{r+1} &= \quad 1 \cdot b_{r+1} \quad + 0 \cdot b_{r+2} + \ldots \quad + 0 \cdot b_n \\
b_{r+2} &= \quad 0 \cdot b_{r+1} \quad + 1 \cdot b_{r+2} + \ldots \quad + 0 \cdot b_n \\
&\vdots \\
b_n &= \quad 0 \cdot b_{r+1} \quad + 0 \cdot b_{r+2} + \ldots \quad + 1 \cdot b_n
\end{aligned}$$

Homogénne sústavy

$$b_i = -c_{i,r+1}b_{r+1} - c_{i,r+2}b_{r+2} - \ldots - c_{i,n}b_n$$

$$\vec{\beta} = b_{r+1}\vec{\gamma}_{r+1} + b_{r+2}\vec{\gamma}_{r+2} + \ldots + b_n\vec{\gamma}_n$$

Dimenzia priestoru riešení

Dôsledok

Nech A je matica typu $m \times n$ a S je priestor riešení homogénnej sústavy lineárnych rovníc s maticou A. Potom

$$d(S) = n - h(A).$$

Dôsledok

Homogénna sústava lineárnych rovníc s n neznámymi, ktorej matica má hodnosť n, má len triviálne riešenie.

Prečo náš argument funguje aj bez výmeny stĺpcov?

Homogénne sústavy

- Pre homogénnu sústavu tvorí množina riešení podpriestor.
- Vieme vyjadriť jeho dimenziu ako $n - h(A)$, nájsť jeho bázu.
- Platí aj obrátene, že každý podpriestor v F^n je množina riešení nejakej sústavy?

Veta

Každý podpriestor priestoru F^n je množinou riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc.

Gaussova eliminačná metóda

- Maticu sústavy môžeme upraviť na redukovaný tvar.
- Z redukovaného tvaru môžeme vyčítať množinu riešení
- Ak sme dostali rovnicu $0 = 1$, tak sústava nemá riešenie.
- Inak môžeme riešenia vyjadriť tak, že zvolíme za parametre tie stĺpce, kde nie sú vedúce jednotky.

Gaussova eliminačná metóda

Sústava nad $\mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 3 + t,\ x_3 = 6 + 2t,\ x_4 = t$

$$\underline{\underline{\{(-8, 3 + t, 6 + 2t, t); t \in \mathbb{R}\}}}$$

Gaussova eliminačná metóda

Sústava nad $\mathbb{Z}_5$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & & & 1 \\ & 1 & 4 & & 1 \\ & & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Dostali sme rovnicu $0 = 2$, sústava nemá riešenie.

Hodnosť transponovanej matice

Veta

Pre každú maticu A nad poľom F platí $h(A) = h(A^T)$.

Hodnosť transponovanej matice

$$h(A^T) = d[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$$

$$A\vec{x}^T = \vec{0}^T \Leftrightarrow x_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_i = (-c_{1,i}, -c_{2,i}, \dots, -c_{r,i}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$-c_{1,i}\vec{\alpha}_1 - c_{2,i}\vec{\alpha}_2 - \dots - c_{r,i}\vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_i = \vec{0}$$

$$\vec{\alpha}_i = c_{1,i}\vec{\alpha}_1 + c_{2,i}\vec{\alpha}_2 + \dots + c_{r,i}\vec{\alpha}_r$$

$$[\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_r]$$

$$h(A^T) = d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]) \leq r$$

$$h(A) \geq h(A^T)$$

Frobeniova veta

Veta (Frobeniova)

Nehomogénna sústava lineárnych rovníc (1) *je riešiteľná práve vtedy, keď matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnosť, t.j.*

$$h(A) = h(A').$$

$$A\vec{x}^T = \vec{\gamma}^T \Leftrightarrow \vec{\gamma} = x_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n$$

$$[\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n] = [\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n, \vec{\gamma}]$$

Riešenia homogénnej a nehomogénnej sústavy

Veta

Nech $\vec{\alpha}$ je riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$A\vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T \tag{N}$$

a S je podpriestor pozostávajúci zo všetkých riešení homogénneho systému

$$A\vec{\alpha}^T = \vec{0}^T. \tag{H}$$

Potom $T = \{\vec{\alpha} + \vec{\beta}; \vec{\beta} \in S\}$ je množina všetkých riešení (N).

Riešenia homogénnej a nehomogénnej sústavy

Ak $\vec{\alpha}$ je riešenie (N) a $\vec{\beta}$ je riešenie (H):

$$A(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^T = A\vec{\alpha}^T + A\vec{\beta}^T = \vec{\gamma}^T + \vec{0}^T = \vec{\gamma}^T.$$

AK $\vec{\delta}$ je ľubovoľné riešenie (N), čiže platí $A\vec{\delta}^T = \vec{\gamma}^T$, tak

$$A(\vec{\delta}-\vec{\alpha})^T = A\vec{\delta}^T - A\vec{\alpha}^T = \vec{\gamma}^T - \vec{\gamma}^T = \vec{0}^T.$$

Potom

$$\vec{\delta} = \vec{\alpha} + \underbrace{(\vec{\delta}-\vec{\alpha})}_{\in S},$$