Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

11. decembra 2023

Definícia jadra a obrazu

Definícia

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom *jadrom lineárneho zobrazenia f* nazývame množinu

$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{\alpha} \in V; f(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$$

a *obrazom lineárneho zobrazenia f* nazývame množinu

$$\operatorname{Im} f = \{f(\vec{\alpha}); \vec{\alpha} \in V\}.$$

Základné vlastnosti

Tvrdenie

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f: V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom $\operatorname{Ker} f$ *je vektorový podpriestor priestoru V a* $\operatorname{Im} f$ *je vektorový podpriestor priestoru W.*

Tvrdenie

Nech $f: V \to W$ je lineárne zobrazenie a $V = [\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n]$. Potom $\operatorname{Im} f = [f(\vec{\alpha}_1), \dots, f(\vec{\alpha}_n)]$.

Základné vlastnosti

Tvrdenie

Nech V s W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie.
Zobrazenie f je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Tvrdenie

Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f\colon V \to W$ je lineárne zobrazenie.
Zobrazenie f je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = W$.

Dôsledok

Lineárne zobrazenie $f\colon V \to W$ je izomorfizmus práve vtedy, keď $\operatorname{Im} f = W$ a $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Základné vlastnosti

Pre lineárne zobrazenie $f: V \to W$:

- injektívnosť $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$;
- surjektívnosť $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$;
- bijektívnosť $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ a $\operatorname{Im} f = W$.

Dimenzia jadra a obrazu

Veta

Nech V a W sú konečnorozmerné vektorové priestory a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Potom

$$d(V) = d(\mathrm{Ker}\, f) + d(\mathrm{Im}\, f).$$